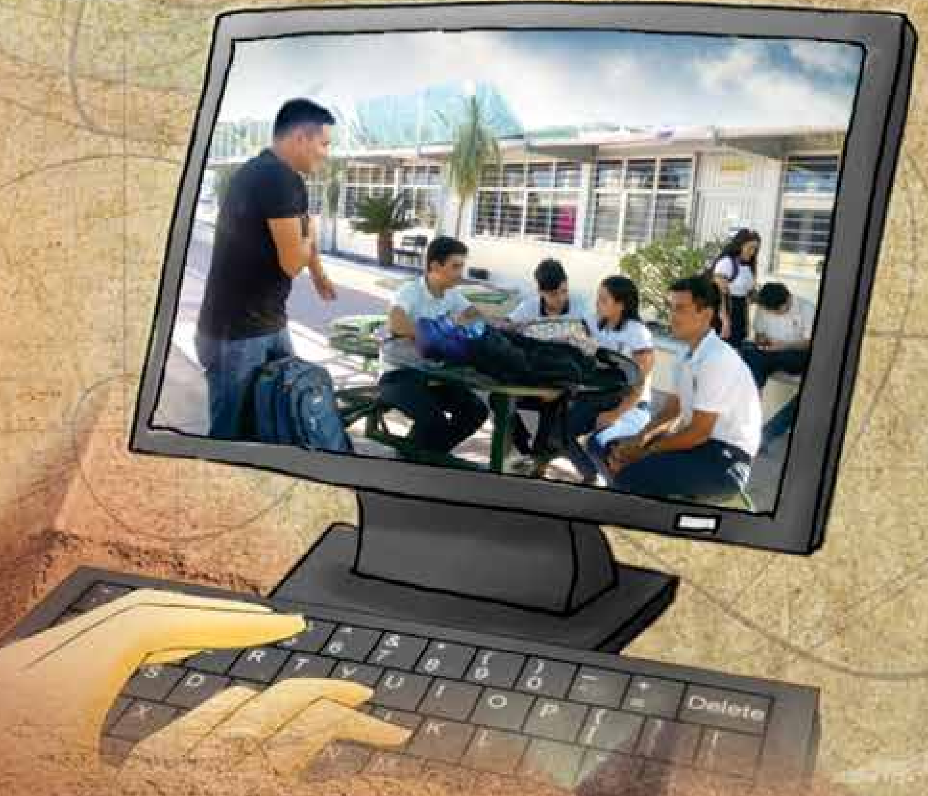
Matemáticas II

Álgebra para Bachillerato

Plan 2015



Autores:
Arturo Ylé Martínez
José Alfredo Juárez Duarte
Armando Flórez Arco

Matemáticas II

Álgebra elemental para bachillerato

POR COMPETENCIAS

Arturo Ylé Martínez
José Alfredo Juárez Duarte
Armando Flórez de Arco

UAS/DGEP

Matemáticas II

Álgebra elemental para bachillerato
por competencias
Plan 2015

Arturo Ylé Martínez
José Alfredo Juárez Duarte
Armando Flórez de Arco

Primera edición, enero de 2009
Tercera reimpresión, diciembre de 2016
Segunda edición, enero de 2017

Diseño interior:
Leticia Sánchez Lara
Carol Judith Zazueta Rivera

Diseño de portada:
Edgar López Romero

Editorial: Servicios Once Ríos Editores
Río Usumacinta 821 Colonia Industrial Bravo
Culiacán, Sin. Tel-fax: 667 712-2950

Edición con fines académicos, no lucrativa.

Impreso en México
Printed in Mexico

Dedicamos este libro a todos los estudiantes
y maestros que hacen, y han hecho,
el esfuerzo cotidiano por mejorar la calidad
del aprendizaje y la enseñanza de las
matemáticas en las aulas del bachillerato
de la Universidad Autónoma de Sinaloa.
Por supuesto, también lo dedicamos a nuestras
familias y amigos. Gracias a todos por
su confianza y apoyo.

LOS AUTORES

Contenido

UNIDAD 2

UNIDAD 3

UNIDAD 4

Presentación

Esta segunda edición del texto de Matemáticas II está destinada a los estudiantes que cursan el primer grado de las preparatorias, con Plan de Estudios 2015, del bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa. Los contenidos del mismo cubren el segundo semestre del ciclo escolar, en correspondencia con las exigencias del Programa de Matemáticas II (Álgebra elemental para bachillerato).

Las competencias genéricas y disciplinares básicas de matemáticas a desarrollar durante el curso son las siguientes:

Competencias genéricas	Atributos	Criterios de aprendizaje
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	4.5 Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas, de manera responsable y respetuosa.	Utiliza las tecnologías de la información y la comunicación como recurso para obtener información y expresar ideas, de acuerdo a las condiciones físicas, personales y/o sociales en que se desarrolla su aprendizaje.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva en la búsqueda y adquisición de nuevos conocimientos.	Sigue instrucciones cumpliendo con los procedimientos preestablecidos.
	5.7 Propone soluciones a problemas del orden cotidiano, científico, tecnológico y filosófico.	Propone ideas de manera coherente para resolver problemas del orden cotidiano, científico, tecnológico y/o filosófico.
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	6.4 Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.	Estructura y expresa ideas y argumentos, de manera comprensible para los demás.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	8.1 Plantea problemas y ofrece alternativas de solución al desarrollar proyectos en equipos de trabajo, y define un curso de acción con pasos específicos.	Identifica alternativas de solución a problemas diversos, mediante una participación efectiva en equipos de trabajo.
	8.3 Asume una actitud constructiva al intervenir en equipos de trabajo, congruente con los conocimientos y habilidades que posee	Participa en equipos de trabajo, aportando ideas y propuestas adecuadas.

Competencias disciplinares básicas del área de matemáticas	Criterios de aprendizaje
1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	Construye e interpreta modelos matemáticos pertinentes para la representación, comprensión y análisis de situaciones o problemas reales, hipotéticos o formales, mediante la modelación y aplicación de conceptos, procedimientos y símbolos del álgebra.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	Formula y resuelve problemas matemáticos reales, hipotéticos o formales, mediante la aplicación de conceptos y procedimientos del álgebra.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	Explica e interpreta los resultados obtenidos en los cálculos, ejercicios y problemas resueltos de álgebra, y los contrasta con axiomas, procedimientos y modelos establecidos y con las condiciones dadas o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	Argumenta la validez de la solución de los ejercicios y problemas resueltos de álgebra, usando métodos numéricos, gráficos o analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	Analiza, las relaciones entre dos o más variables de un proceso o problema social o natural, aplicando el álgebra para determinar o estimar su comportamiento.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	Interpreta tablas, gráficas, diagramas y textos con símbolos, conceptos y operaciones del álgebra, mostrando comprensión en la lectura de textos de Matemáticas y emitiendo juicios correctos y bien fundados sobre las diversas representaciones de los objetos matemáticos.

El propósito general de la asignatura de Matemásticas II es que al finalizar el curso el alumno comprenda y resuelva las ecuaciones, funciones e inecuaciones lineales y cuadráticas, y las aplique en la formulación y resolución de problemas de su vida cotidiana, y de algunas áreas de las ingenierías y las ciencias.

El contenido tratado en este texto es de nivel básico elemental, así los conocimientos teóricos que aparecen en cada capítulo (los cuales se han reordenados o reducido respecto a la primera edición) constituyen los mínimos que se requieren para la comprensión del contenido y el desarrollo de las competencias genéricas y matemáticas mencionadas anteriormente. Mientras que, didácticamente, se desarrollan de manera intuitiva e informal, hasta donde sea matemáticamente posible, por lo cual se enfatiza en la visualización geométrica de los conceptos y operaciones, y en aplicaciones sencillas.

El curso de Matemáticas II se encuentra diseñado para ser trabajado por procesos, desde el enfoque en competencias, siguiendo una metodología activa de enseñanza/aprendizaje que deberá estar centrada en: investigaciones autónomas del alumno, exposiciones de clase, talleres de resolución individual y/o grupal de ejercicios y problemas escolares formales o contextualizados, argumentaciones y demostraciones matemáticas, evaluación y comunicación de procedimientos y resultados, análisis y corrección de errores.

Estas orientaciones didácticas generales deberán desarrollarse en un ambiente, o microcosmos cultural de practicantes o aprendices, similar al de la comunidad científica. Y se recomienda que el docente lo implemente a través de los siguientes momentos y **funciones didácticas (FD):** ***motivación, orientación hacia el objetivo, aseguramiento del nivel de partida, elaboración o desarrollo del nuevo contenido de aprendizaje, consolidación y fijación del aprendizaje, control y evaluación del aprendizaje.***

Los contenidos disciplinares tratados abordan ampliamente la terminología y simbología algebraica y el trabajo procedimental o algorítmico. La ejercitación que se propone en todos los temas es amplia y variada y resulta suficiente para el nivel de profundidad y complejidad con que se deben cumplir los objetivos del programa. Los ejercicios están dirigidos en lo fundamental al desarrollo de habilidades básicas y a través de ellos se propicia la integración del contenido.

En cada uno de los apartados, en que se dividen los capítulos, se presentan ejemplos completamente desarrollados de los problemas y ejercicios típicos correspondientes a los conocimientos teóricos tratados, con el propósito de contribuir al desarrollo de habilidades en los procedimientos y estrategias de trabajo y para fijar los conocimientos.

Para cada uno de los temas tratados hay una gran variedad de actividades de aprendizaje dedicadas a la resolución de problemas, lo que requiere habilidad para traducir del lenguaje común al matemático y viceversa, o sea, para la elaboración y trabajo con modelos matemáticos algebraicos.

El contenido del libro se ha estructurado y organizado en cuatro capítulos, en aras de lograr una mejor sistematización e integración de los temas. De esta manera, en el primer capítulo se estudian las ecuaciones lineales o de primer grado con una incógnita, así como los elementos de las funciones y las funciones lineales. En el segundo capítulo se estudian, partiendo de las desigualdades y propiedades de orden de los números reales, las inecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales. Posteriormente, en el tercer capítulo, se estudian las potencias con exponentes racionales, los radicales con radicandos algebraicos y, finalmente, los logaritmos. Por último, en una cuarta unidad, el curso se cierra con el estudio de las ecuaciones, funciones e inecuaciones cuadráticas

Antes de cerrar esta presentación queremos sugerir y advertir a los profesores y estudiantes de matemáticas del bachillerato, que usen este material como lo que es: un **material de apoyo didáctico**. Ningún texto, por sí solo, resuelve todos los problemas que conlleva el proceso de enseñanza/aprendizaje del álgebra. Por lo cual, el maestro deberá aplicar toda su experiencia y competencias docentes para el uso planificado, crítico y selectivo del texto, mientras que el estudiante deberá desarrollar, con disciplina y con la guía del profesor, su mayor esfuerzo para su comprensión.

Estimables lectores, aunque este texto ha sido revisado con mucho cuidado en su escritura y edición, desgraciadamente siempre se presentan errores involuntarios, por lo cual les agradecemos de antemano que nos hagan llegar sus comentarios, críticas y propuestas de cambio a la Academia de Matemáticas de la DGEP-UAS (o a la dirección electrónica arturoyle@hotmail.com), para así poder mejorarlo, conjuntamente con ustedes, en futuras ediciones.

Esta segunda edición del libro se ha realizado en los talleres gráficos de Once Ríos Editores, los lectores podrán apreciar la calidad del trabajo que evidencia su profesionalismo, lo que nos produce gran satisfacción, por tal razón queremos expresarles nuestro reconocimiento y felicitación.

Agradecemos las facilidades que para esta publicación brindaron los directivos de la Dirección General de Escuelas Preparatorias de la Universidad Autónoma de Sinaloa.

Finalmente les deseamos respectivamente a los alumnos y profesores muchos éxitos en el aprendizaje y enseñanza del Álgebra y esperamos que este libro les ayude en este desempeño.

Muchas gracias.

LOS AUTORES

A T E N T A M E N T E

Culiacán Rosales, Sinaloa, Enero de 2017

1 Ecuaciones y funciones lineales

Propósito de unidad

Resuelve y aplica las ecuaciones y funciones lineales en la formulación y resolución de problemas de su vida cotidiana, y de algunas áreas de las ingenierías y las ciencias.

Contenido

- **Introducción:** Problemas que originan modelos lineales.

- **Ecuación lineal:** Concepto y propiedades de las igualdades. Soluciones o raíces de una ecuación. Ecuaciones equivalentes. Ecuación lineal. Técnicas de resolución. Ecuaciones lineales fraccionarias. Ecuaciones literales lineales. Despeje de fórmulas.

- **Relaciones y funciones:** Función lineal. Gráficas. Angulo de inclinación y pendiente de una recta. Parámetros de una función lineal. Ordenada en el origen de una función lineal. Modelación y aplicaciones de las funciones y ecuaciones lineales.

YO ♥ LAS MATEMÁTICAS

Indicadores de desempeño

En esta unidad debe lograrse que los alumnos sean capaces de:

1) Definir e identificar la ecuación lineal (o de primer grado), así como de reconocer la relación entre ecuación y función lineal.
2) Resolver ecuaciones de primer grado y ecuaciones que pueden transformase en ellas, aplicando los procedimientos algebraicos estudiados.
3) Definir (ya sea como modelo matemático, o como relación de dependencia entre variables), graficar y aplicar las funciones lineales $y = mx + b$. Así como definir, calcular e interpretar el "cero de una función lineal", y la relación existente entre el cálculo de ceros y la resolución de ecuaciones de primer grado.
4) Definir y calcular la pendiente "m" de una función lineal cuando se conocen dos puntos de su gráfica. Determinar la función lineal (y su ecuación lineal correspondiente) conocidos dos puntos de su gráfica.
5) Plantear y resolver problemas que se resuelven mediante una ecuación o función lineal, o que se puedan transformar en éstas.

1 unidad

Actividad preliminar: ¿Qué es una ecuación o función lineal?

Ver los siguientes videos:
http://www.youtube.com/watch?v=qYZur_-nXgI
http://www.youtube.com/watch?v=R38_FohTJPc

En esta unidad se estudiarán los conceptos básicos y los métodos de resolución concernientes a las ecuaciones lineales, también se estudiarán los conceptos y formas de representación de las funciones lineales, poniéndose énfasis especial en el planteo y resolución de problemas matemáticos y extra-matemáticos que requieren de dichos modelos matemáticos.

1.1 Planteamiento y resolución de problemas que dan origen a una ecuación de primer grado con una variable

Problema 1 (de economía y negocios). Un taxista cobra $120 por "tarifa mínima" y luego $20 por cada kilómetro recorrido. Un segundo taxista no cobra tarifa mínima, pero cobra $60 por cada kilómetro.

a) Plantear la "ecuación de cobro por viaje" correspondiente a cada taxista.
b) Determinar en cuál taxi es más económico viajar una distancia de 4 kilómetros.
c) ¿En qué distancia ambos taxistas cobran lo mismo?

Resolución:

a) Si representamos por n el kilometraje recorrido y por C al costo por ecuaciones son:

$$\textbf{Primer taxista: } C_1 = 120 + (20 \times n)$$
$$\textbf{Segundo taxista: } C_2 = 60 \times n$$

b) Si los taxistas son honestos (hipótesis necesaria para los cálculos), el primer taxi cobraría $C_1 = 120 + 20 \times 4 = \$200$, y el segundo taxi cobraría $C_2 = 60 \times 4 = \$240$, por lo tanto, resulta más económico viajar en el primer taxi.
c) Igualemos los cobros: $C_1 = C_2 \Rightarrow 120 + (20 \times n) = 60 \times n$, por lo tanto los taxistas cobrarán lo mismo cuando hayan recorrido 3 km (¿Por qué?).

Problema 2 (de carreras entre amigos). Un atleta da a un amigo (que no es atleta) una ventaja de 10 metros en una carrera de 100 metros. Si el que tiene ventaja recorre 6 metros en cada segundo y el atleta recorre 8 metros en cada segundo determinar:

a) ¿En cuánto tiempo alcanzará el atleta a su amigo?
b) ¿En cuánto tiempo terminará cada uno la carrera?
c) ¿Durante cuánto tiempo de la carrera el atleta va detrás del amigo?
d) ¿Durante cuánto tiempo de la carrera el atleta va delante del amigo?
e) ¿En qué tiempo de la carrera el atleta va perdiendo por 3 metros?
f) ¿En qué tiempo de la carrera el atleta va ganando por 8.5 metros?

Resolución por el método 1

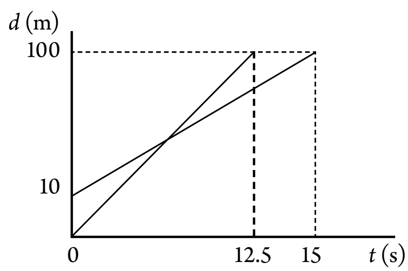
a) Un método de resolución plausible puede ser elaborar una tabla numérica de entradas y salidas como la siguiente:

Tiempo transcurridos en segundos: t	Distancia recorrida por el atleta: D	Distancia recorrida por el amigo: d
0 seg.	$8 \times 0 = 0$ metros	$10 + 2 \times 0 = 10$ metros
2 seg.	$8 \times 2 = 16$ metros	$10 + 2 \times 6 = 22$ metros
3 seg.	$8 \times 3 = 24$ metros	$10 + 3 \times 6 = 28$ metros
4 seg.	$8 \times 4 = 32$ metros	$10 + 4 \times 6 = 34$ metros
5 seg.	$8 \times 5 = 40$ metros	$10 + 5 \times 6 = 40$ metros
8 seg.	$8 \times 8 = 64$ metros	$10 + 8 \times 6 = 58$ metros
10 seg.	$8 \times 10 = 80$ metros	$10 + 10 \times 6 = 70$ metros

De donde se observa que el atleta alcanza a su amigo a los 5 segundos.

b) Recordando la fórmula de física que establece que: $t\,(\text{tiempo}) = \dfrac{d\,(\text{distancia})}{v\,(\text{velocidad})}$. Es fácil calcular que el atleta demorará $t = \dfrac{100\ m}{8\ m/seg} = 12.5$ seg en recorrer los 100 metros, de acuerdo a la velocidad o rapidez con que corre. Mientras que el amigo demorará $t = \dfrac{90\ m}{6\ m/seg} = 15$ seg en recorrer los 90 metros (considerando la ventaja de 10 m).
Las preguntas c) y d) se pueden contestar fácilmente en base a los cálculos realizados en la tabla: ¿Cuáles son las respuestas?______________________________.

Sin embargo, las preguntas e) y f) no pueden contestase directamente a partir de la tabla, pero, sí con los resultados de la misma se dibuja un gráfico que relacione la distancia recorrida respecto del tiempo empleado se obtiene una gráfica parecida a la siguiente:



A partir de la cual se pueden responder estas preguntas con una buena aproximación, a condición de que dicha gráfica se elabore de la mejor manera en una hoja milimétrica.

Tarea 1: elabora dicha gráfica y contesta en base a ella estas preguntas y, después, compara tus respuestas con las obtenidas por tus compañero(a)s.

Resolución por el método 2

Por supuesto que todas las preguntas anteriores pueden responderse aumentando el número de entradas y salidas numéricas en la tabla correspondiente.

Pero también pueden ser respondidas de manera más directa, aunque tal vez por un camino algo más complicado, construyendo los modelos o ecuaciones que representan la problemática y realizando los cálculos sobre la base de dichos modelos tal como se ilustra a continuación:

a) Para determinar en cuánto tiempo el atleta alcanza al amigo se puede plantear en base al enunciado del problema (o del patrón de los cálculos de la tabla) las ecuaciones: $D = 8t$ y $d = 10 + 6t$. Así, cuando el atleta alcanza a su amigo ambas distancias son iguales, lo cual es equivalente a tener que: $8t = 10 + 6t \Rightarrow 2t = 10$. De donde, se determina que: $t = 10 / 2 = 5$ segundos. O sea, el atleta alcanza a su amigo a los 5 segundos después de iniciada la carrera.

b) Para calcular los tiempos de culminación de la carrera para ambos, usamos respectivamente las ecuaciones anteriores:
Tiempo del atleta: $100 = 8t$, de donde: $t = 100 / 8 = 12.5$ segundos.
Tiempo del amigo: $100 = 10 + 6t$, de donde: $t = (100 - 10) / 6 = 15$ segundos.

c) y d) De las respuestas anteriores está claro que el atleta va detrás en la carrera cuando $0 < t < 5$ y va delante cuando $5 < t \leq 12.5$ (¿Por qué?).

e) Que el atleta vaya perdiendo por 3 metros, significa que: $d - D = 3$, de donde, $(10 + 6t) - 8t = 3 \Rightarrow 10 - 2t = 3 \Rightarrow 10 - 3 = 2t \Rightarrow t = 7 / 2 = 3.5$ seg. Por tanto, exactamente a los 3.5 seg. de iniciada la carrera el atleta va perdiendo la carrera por 3 metros de diferencia.

f) Que el atleta vaya ganando con 8.5 metros, significa que: $D - d = 8.5$, de donde, $8t - (10 + 6t) = 8.5 \Rightarrow 8t - 10 - 6t = 8.5 \Rightarrow 2t - 10 = 8.5 \Rightarrow t = (8.5 + 10) / 2 = 9.25$ seg. Por tanto, exactamente a los 9.25 seg. de iniciada la carrera el atleta va ganando la carrera por 8.5 metros de ventaja.

Problema 3 (de numerología y detectives). ¿Eres capaz de encontrar tres números enteros consecutivos tales que su suma sea 42? ¡Inténtalo primero tú solo, o con tus compañeros, antes de ver las diferentes vías de solución mostradas a continuación!

Resolución por el método de tanteos

Suponiendo que el número más pequeño de los buscados es el 10, en consecuencia los que siguen son 11 y 12, pero como $10 + 11 + 12 = 33 < 42$, entonces debemos probar con otro número inicial mayor. ¿Cuál número sugieres?

Sea 14 el nuevo número, por tanto los consecutivos que le siguen son 15 y 16, pero

$$14 + 15 + 16 = 45 > 42.$$

De donde, como la suma de los números excede en tres unidades a 42, se infiere que los números buscados son menores que los propuestos.

Resulta fácil ahora encontrar los números, pues basta con restarle la unidad a cada uno de los números anteriores que fueron propuestos como posible solución para que la suma sea exactamente 42. Finalmente, pues, se encuentra que los números buscados son 13, 14 y 15, ya que 13 + 14 + 15 = 42.

Resolución por el método de cancelación

Como los números buscados son consecutivos, otra forma de pensar y resolver este problema es considerar que estos forman un progresión aritmética y suponer que k es el numero del medio, o sea que: $(k-1) + k + (k+1) = 3k = 42$. Por tanto, el número k es el entero que multiplicado por 3 da como resultado 42, y este es el 14. De donde, los números buscados son 13, 14 y 15, pues 13 + 14 + 15 = 42.

Resolución por el método de las ecuaciones

Sean a, b, c los números enteros buscados, entonces $a + b + c = 42$. Y como son consecutivos entre sí, entonces también los podemos representar por:

$$a = x\,,\ b = x + 1,\ c = x + 2$$

De donde, se puede plantear la ecuación:

$$x + (x+1) + (x+2) = 42.$$

Cuya solución es:

$$x + x + 1 + x + 2 = 42 \quad \Rightarrow \quad 3x = 39 \quad \Rightarrow \quad x = 39/3 = 13$$

Por tanto: $a = 13$ $\qquad b = 13 + 1 = 14$ $\qquad c = 13 + 2 = 15$

Comprobación: $\qquad 13 + 14 + 15 = 42 \qquad 42 = 42$

Respuesta: Por tanto los números buscados son 13, 14 y 15.

Evaluación breve de los métodos: si haces una comparación de los métodos anteriores usados, tal vez pienses que resolver problemas mediante la formulación y resolución de una ecuación es con mucho más complicado, sin embargo, aunque tal vez puedas tener razón para estos problemas en particular, en realidad el método de modelación a través de ecuaciones resulta más conveniente cuando los problemas resultan más complejos. Es por esto que se justifica el gran esfuerzo que requiere su aprendizaje.

Por ejemplo, y para convencerte de lo anterior, intenta resolver sin, y con, ecuaciones los siguientes problemas:

Problema 4 (de compras). El Sr. Martínez compró un automóvil de agencia en \$146,000.00. Si dicho costo incluye un 14.5 % de impuesto, ¿Cuál era el precio del automóvil sin agregar el impuesto?

Problema 5 (de comercio). Un comerciante vende dos clases de frijoles, el primero de \$6.00 el kilo y el segundo de \$7.20 el kilo. ¿Cuántos kilos hay que poner de cada clase de fríjol para obtener 60 kilos de mezcla a \$7.00 el kilo?

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

Resuelve individualmente o en equipo, y por cualquier método, los siguientes ejercicios y/o problemas, y si te es posible encuentra un modelo matemático (ecuación) que te facilite su resolución. Además, compara la eficacia de tu método de resolución con los encontrados por los demás compañeros y compañeras.

A1) Determinar el valor de k ($k \in \mathbb{N}$) en cada uno de los siguientes casos para que la igualdad sea verdadera:

a) $9^k \times 9^6 = 9^8$; $k =$_______ b) $(8^6)^k = 8^{15}$; $k =$_______

A2) Determinar tres enteros consecutivos tales que su suma sea 72.

A3) Determinar 3 números enteros consecutivos impares tales que su suma sea 69.

A4) ¿Cuál es el número que al aumentar en 20 se triplica?

A5) ¿Cómo se pagaría una deuda de \$700 con 52 monedas, unas de \$20 y otras de \$10?

A6) ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuyo perímetro es igual a 70 metros?

A7) Una granja tiene cerdos y gallinas, en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y gallinas hay?

A8) Trabajando juntos, dos obreros tardan en hacer un trabajo 14 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacerlo por separado si uno es el doble de rápido que el otro?

A9) Dos amigos van a jugar al Casino con \$84,000 en total. Cuando el primero de ellos pierde \$16,000 y el segundo gana \$20,000, quedan con la misma cantidad de dinero. ¿Con qué cantidad iniciaron jugando cada uno?

A10) Un tren sale de una estación A para otra estación B con una velocidad de 45km/h. Una hora después sale otro tren del mismo punto y en la misma dirección que el anterior, con una velocidad de 50 km/h. Suponiendo que B está suficientemente lejos de A, ¿dentro de cuánto tiempo y a qué distancia de A alcanzará el segundo tren al primero?

A11) Un ladrón un cesto de naranjas del mercado robó y por entre la gente al campo escapó; al saltar una cerca, la mitad más media naranjas perdió; perseguido después por un perro, la mitad menos media naranjas abandonó; y luego tropezó en una cuerda, y la mitad más media naranjas desparramó; ya en su guarida a salvo, dos docenas de naranjas guardó. ¿Cuántas naranjas robó el ladrón?

1.2 Igualdades y ecuaciones: conceptos y definiciones básicas

Al resolver los problemas anteriores, posiblemente, obtuviste algunas igualdades o ecuaciones (*modelos matemáticos*) como las siguientes:

$4w = 70$ $\quad y + 20 = 3y$ $\quad x + y = 10$ $\quad 2x + 1 = 2x^2$ $\quad x + (x + 2) + (x + 4) = 69$ $\quad \frac{x+5}{x+9} = \frac{2}{3}$

$50x = 45 + 45x$ $\quad x + (x + 1) + (x + 2) = 72$ $\quad 20x + 10(52 - x) = 700$

De ahí que una ecuación pueda ser conceptualizada como un modelo matemático que se origina en la representación simbólica de una problemática real. Así, la ecuación $y + 20 = 3y$ sirve para modelar matemáticamente la cuestión ¿Cuál es el número que, al aumentar en 20, se triplica?

Por supuesto que una ecuación también puede ser conceptualizada como una igualdad entre dos expresiones algebraicas, donde la expresión que se antepone al signo "=" se llama **el primer miembro de la ecuación** o miembro izquierdo (M.I.), y la expresión que sigue al signo "=" se llama **el segundo miembro de la ecuación** o miembro derecho (M.D.). Así, en la ecuación $x + (x + 1) + (x + 2) = 72$, el primer miembro es $x + (x + 1) + (x + 2)$ y el segundo miembro es 72.

Si ambos miembros de una ecuación son polinomios reducidos o simplificados, se llama **grado de la ecuación** al mayor de los grados de estos polinomios, o al grado común de los mismos en caso de que estos polinomios sean del mismo grado y de que los términos que determinan el grado sean diferentes. De donde, la ecuación $y + 20 = 3y$ es de primer grado, mientras que la ecuación $2x + 1 = 2x^2$ es de segundo grado.

Nota: En esta unidad sólo nos ocuparemos de la resolución de ecuaciones de primer grado o lineales y de los problemas que conducen al planteamiento y resolución de ecuaciones de este tipo. En la unidad cuatro nos ocuparemos de la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Las variables que intervienen en las ecuaciones reciben el nombre de **incógnitas**, y los valores que pueden tomar están generalmente restringidos a un **dominio** o sistema numérico. Todos los números del dominio dado, que al hacer la sustitución convierten a la ecuación dada en una **igualdad numérica** (donde ambos miembros de la igualdad planteada adquieren el mismo valor numérico), se denominan **soluciones o raíces** de la ecuación. El conjunto de todas las soluciones de una ecuación se denomina también **conjunto solución**.

Resolver, por tanto, una ecuación es hallar su conjunto solución. Así, pues, **resolver una ecuación** consiste en determinar, dentro del dominio de la variable, los números que al sustituirse por la variable transforman la igualdad algebraica en una igualdad numérica.

Así, como ejemplos de ecuaciones con una sola incógnita, tenemos las ecuaciones $50x = 45 + 45x$ y $\frac{x+5}{x+9} = \frac{2}{3}$, donde la primera ecuación solamente se satisface para $x = 9$ mientras que la segunda sólo se cumple para $x = 3$.

Las ecuaciones pueden tener más de una incógnita, por ejemplo la ecuación $x + y = 10$ tiene dos incógnitas y solamente la satisfacen aquellos números cuya suma algebraica sea 10, por ejemplo: $x = 1$, $y = 9$; $x = 14$, $y = -4$; $x = -2$, $y = 12$; $x = 0.5$, $y = 9.5$, etcétera. De hecho hay una infinidad de valores que satisfacen esta tercera ecuación, pero no todo par de valores la satisface; por ejemplo, para $x = 1$, $y = 9.5$ la igualdad no se cumple.

El conjunto solución de una ecuación puede ser finito o infinito. Recibe el nombre de **ecuación determinada** la que tiene un número finito de soluciones. Es **ecuación indeterminada** toda ecuación con infinitas raíces, tal es el caso por ejemplo de:

Ejemplos	$x - y = 2$	algunas soluciones:	$x = 2,\ y = 0$; $x = 3,\ y = 1$; ...
	$\frac{x}{\lvert x \rvert} = 1$	conjunto solución:	$x \in \Re,\ x > 0$
	$\frac{x}{\lvert x \rvert} = -1$	conjunto solución:	$x \in \Re,\ x < 0$

$\frac{|x|}{|x|} = 1$ conjunto solución: $x \in \Re,\ x \neq 0$

Antes de continuar insistiremos en la necesidad de considerar el **dominio de las variables** o incógnitas para determinar el conjunto solución de una ecuación, sean por ejemplo las siguientes ecuaciones:

Ejemplos

$2x = -6$	No tiene solución en el conjunto de los números naturales, en el conjunto de los números enteros $x = -3$ es la solución.
$\|x\| = 4$	Tiene como soluciones $x = 4$ y $x = -4$ en $\mathbb{Z}$, pero, en el conjunto de los números naturales $x = 4$ es la solución única.
$x^2 + x - 2 = 0$	Tiene como soluciones $x = -2$ y $x = 1$ en $\mathbb{Z}$, pero, en el conjunto de los números naturales $x = 1$ es la única solución.
$x^2 + 5.5x - 3 = 0$	Tiene como soluciones $x = 0.5$ y $x = -6$ en $\mathbb{Q}$, pero, en el conjunto $\mathbb{Z}$, $x = -6$ es la solución única y en el conjunto de los números naturales no tiene solución.

Hay ecuaciones tales como:

$2x + 3y = 3y + 2x$ $\qquad 2(x+1) + 3(-4+x)\ 5x - 10$ $\qquad \frac{x+1}{6} + \frac{5x+11}{6} = x + 2$

que se verifican cualesquiera sean los valores numéricos que se atribuyan a cada una de las variables o incógnitas, ellas reciben el nombre de **identidades**. Obsérvese que una identidad puede considerarse como un caso particular de ecuación indeterminada.

En algunos casos es conveniente destacar que una igualdad es una identidad, se utiliza entonces, en sustitución del signo de igual, el signo $\equiv$ que se lee "idéntico a".

Así puede escribirse: $a + b \equiv b + a \quad ; \quad x + y + z \equiv x + (y + z)$.

Ecuación imposible es aquella que carece de solución, sean por ejemplo:

$$x + 1 = x \quad , \quad |x| = -3 \quad , \quad 7x - 3 = 7x + 4$$

Hay que enfatizar que la clasificación de determinada, indeterminada o imposible dada a una ecuación es con respecto a un cierto dominio numérico, como se pudo apreciar en ejemplos anteriores. Así, pues, el hecho de que una ecuación sea o no resoluble, no depende sólo de la ecuación en sí, esto depende también del dominio de las variables. En lo adelante, si no se hace referencia en las ecuaciones a un dominio para las variables, entonces debe considerarse como tal al conjunto de los números reales.

Propiedades de la igualdad

Ya que una ecuación es una igualdad entre dos expresiones que contienen variables, es muy importante para la resolución de ecuaciones precisar y recordar las siguientes propiedades fundamentales de la igualdad.

Suponiendo que $a, b, c,$ son números reales, variables o expresiones algebraícas, en las igualdades se cumplen las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: $a = a$
2. Simétrica: si $a = b$, entonces $b = a$
3. Transitiva: si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$
4. Principio de sustitución: Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$ y $ac = bc$

Dos consecuencias importantes del principio de sustitución son las reglas inversas de estas dos reglas, que son las leyes de cancelación para la suma y la multiplicación.

1. Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$ (Se resta c a ambos miembros)
2. Si $ac = bc$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$ (Se divide ambos miembros por c)

Estas propiedades de la igualdad junto a las propiedades básicas de los números reales estudiadas en Matemáticas I se utilizarán a continuación para resolver ecuaciones.

1.3 Ecuaciones lineales o de primer grado con una incógnita: conceptos, definiciones y proceso o algoritmo de resolución

Toda ecuación lineal o de primer grado con una incógnita es de la forma básica o estándar:

$$ax + b = 0 \quad ; \quad a \text{ y } b \in \Re \quad \text{y} \quad a \neq 0$$

O se puede reducir a esta forma aplicando transformaciones algebraicas.

Las siguientes ecuaciones son ejemplos de ecuaciones lineales o de primer grado con una incógnita:

a) $2x + 7 = 0$ b) $3x - 10 = 0$ c) $y + 20 = 3y$ d) $\frac{9x + 21}{-3} = x + 7$

e) $x^2 + 2x + 5 = x^2 + 4x - 21$ f) $\frac{x}{9} - 1 = \frac{5}{6}$

Así, de las ecuaciones anteriores las dos primeras están en la forma básica, mientras que las restantes no lo están pero pueden reducirse a dicha forma, por lo cual todas son lineales o de primer grado con una incógnita.

Las soluciones de algunas ecuaciones lineales son inmediatas pero otras no. Por ejemplo en las ecuaciones de primer grado: $x + 8 = 10$ y $3x - 4 = 0.6\,(x + 5)$, resulta fácil determinar por simple inspección que la solución de la primera ecuación es $x = 2$, en tanto que resulta mucho más complicado determinar en lo inmediato la solución de la segunda ecuación.

De donde, pues, es necesario disponer de principios y procedimientos para resolver una ecuación cuya solución no sea inmediata; con otras palabras, cómo debe procederse para saber si la ecuación tiene o no soluciones y si las tiene, de qué manera pueden calcularse.

En este sentido, para comenzar la construcción y descubrimiento de dicho procedimiento o algoritmo de resolución es necesario primero conceptualizar y definir las ecuaciones y transformaciones equivalentes. Se dice que **dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones**, es decir, si toda solución de una de ellas lo es también de la otra y recíprocamente.

Ejemplo

Ecuaciones equivalentes:

$$2x = -6 \quad \text{y} \quad 3 + x = 0$$

puesto que la única solución $(x = -3)$ de la primera ecuación es también la única solución de la segunda; en cambio, ninguna de las ecuaciones anteriores es equivalente a: $|x| = 3$ porque esta ecuación tiene, además de la solución común $x = -3$, la raíz $x = 3$.

De hecho, como se estudiará en el próximo apartado, para resolver una ecuación se efectúan en ésta sucesivas transformaciones hasta lograr una ecuación equivalente y de solución inmediata. Las transformaciones que conducen a ecuaciones equivalentes a las dadas, se llaman **transformaciones equivalentes.**

Son transformaciones equivalentes las siguientes:

1) **Si se intercambian los miembros de una ecuación dada, se obtiene una ecuación equivalente.**

Ejemplo $\quad 7 = x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad$ (es equivalente a) $\quad x + 3 = 7$

2) **Si en una ecuación se efectúan las operaciones indicadas en cada uno de sus miembros, se obtiene una ecuación equivalente.**

Ejemplo $\quad 3x + x = 2(x + 1) \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 2x + 2$

Así pues, si los miembros de una ecuación a resolver no están ambos en forma polinomial por tener operaciones indicadas o signos de agrupación, se comienza por reducirlos a esta forma siguiendo el orden de las operaciones o el procedimiento para eliminar estos signos.

3) **Si se suma o resta a los dos miembros de una ecuación un mismo número o una misma expresión algebraica entera (donde la variable no puede aparecer en un denominador), se obtiene una ecuación equivalente.**

Ejemplos

$$\begin{array}{lclcl}
7x + 4 = 2 - x & \Leftrightarrow & 7x + 4 + 9x = 2 - x + 9x & \Leftrightarrow & 16x + 4 = 2 + 8x \\
3x - 10 = x & \Leftrightarrow & 3x - 10 + 10 = x + 10 & \Leftrightarrow & 3x = x + 10 \\
5x = 16 + x & \Leftrightarrow & 5x - x = 16 + x - x & \Leftrightarrow & 4x = 16 \\
2x + 5 = x - 8 & \Leftrightarrow & 2x + 5 - 5 = x - 8 - 5 & \Leftrightarrow & 2x = x - 13 \\
2x = x - 13 & \Leftrightarrow & 2x - x = x - 13 - x & \Leftrightarrow & x = -13
\end{array}$$

Una consecuencia muy útil de esta transformación es la siguiente **regla de transposición de términos:**

Si en una ecuación se suprime un término en uno de sus miembros y se suma al otro miembro el opuesto del término suprimido, se obtiene una ecuación equivalente.

Esta regla ya nos permite resolver algunas ecuaciones de primer grado sencillas como la siguiente: $2x + 5 = x - 8$.

Si se transpone o pasa 5 al segundo miembro, es decir, se suprime el término 5 en el primer miembro y se suma –5 al segundo miembro, se tiene la ecuación equivalente:

$$2x + 5 = x - 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = x - 8 - 5$$

y realizando las operaciones indicadas en el segundo miembro se obtiene:

$$\Leftrightarrow \quad 2x = x - 13$$

Y si ahora se transpone o pasa x al primer miembro, es decir, se suprime el término x en el segundo miembro y se suma $-x$ al primer miembro, se tiene la ecuación equivalente:

$$2x - x = -13$$

Y realizando las operaciones en el primer miembro se obtiene finalmente la ecuación equivalente que muestra la solución o raíz de la ecuación original:

$$\Leftrightarrow \quad x = -13$$

Una consecuencia de lo anterior es que: si en una ecuación se suprime un mismo término en ambos miembros se obtiene una ecuación equivalente. Así, por ejemplo, son equivalentes:

$$2x - 8 = 3(x + 1) - 8 \qquad \text{y} \qquad 2x = 3(x + 1)$$

$$4(x + 2) - 3 + 2x = 2(x - 3) + 2x - 5 \qquad \text{y} \qquad 4(x + 2) - 3 = 2(x - 3) - 5$$

4) **Si en una ecuación se multiplican o dividen ambos miembros por un mismo número diferente de cero, se obtiene una ecuación equivalente.**

Así en la ecuación $3x = x + 2$ al multiplicar o dividir sus miembros por 3 se obtienen respectivamente las ecuaciones equivalentes:

$$3x = x + 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 9x = 3x + 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{x + 2}{3}$$

Es importante destacar la siguiente consecuencia de esta transformación que constituye la llamada **regla de transposición de factores o divisores:**

Si en una ecuación se suprime un número que es factor (o divisor) de todo un miembro, y se divide (o multiplica) al otro miembro por el número suprimido, se obtiene una ecuación equivalente.

Ejemplo

$$\frac{2x + 1}{4} = x + 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x + 1 = 4(x + 3) \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x + 1 = 4x + 12$$

$$-3(x + 7) = 9x + 21 \qquad \Leftrightarrow \qquad x + 7 = \frac{9x + 21}{-3} \qquad \Leftrightarrow \qquad x + 7 = -3x - 7$$

¿Por qué en la ecuación $\frac{x}{2} + 1 = 3$ es incorrecto “trasponer” el divisor 2 de esta manera: $x + 1 = (3)(2)$? y ¿Cuál es la manera correcta de hacerse? ______________.

Cuando los términos de una ecuación a resolver tienen divisores, suele ser práctico como primer paso a dar, **eliminar o suprimir** dichos divisores, es decir, encontrar una ecuación equivalente cuyos términos carezcan de divisores. Para ello se multiplican ambos miembros de la ecuación por un múltiplo común (el más conveniente es el m.c.m) de los divisores de los términos.

Por ejemplo, en la ecuación $\frac{x}{9} - 1 = \frac{5}{6}$ se multiplica por 18 (m.c.m de 9 y 6) y se obtiene la ecuación equivalente sin denominadores: $2x - 18 = 15$.

En resumen: Resolver una ecuación es llevarla paso a paso, aplicando transformaciones equivalentes, hasta la forma $\boldsymbol{x = c}$, cuando esto ocurre se dice que se **ha despejado la incógnita** y $\boldsymbol{c}$ es la solución de la ecuación. De modo que, despejar la incógnita y resolver la ecuación son expresiones equivalentes. Por último, se recomienda siempre realizar la comprobación de las soluciones obtenidas.

Con las transformaciones equivalentes y las reglas de transposición de términos estamos ahora en condiciones de resolver ecuaciones de primer grado aplicando convenientemente en forma sucesiva dichas transformaciones equivalentes.

A continuación resolveremos algunas ecuaciones en las que habrá que aplicarse los procedimientos algebraicos estudiados y que conducen a ecuaciones lineales o de primer grado con una incógnita.

Ejemplo

Resolver la ecuación: $x + 6 = 4$

Resolución:

Se resta 6 en ambos términos de la ecuación (lo cual es equivalente a transponer el 6 al segundo miembro de la ecuación)

$$x + 6 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x + 6 - 6 = 4 - 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$$

o también como: $x \overset{+6}{+\,6} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 \overset{-6}{-\,6} = -2$

Ejemplo

Resolver la ecuación: $y - 2 = 7$

Resolución:

Se suma 2 en ambos términos de la ecuación (lo cual es equivalente a transponer el – 2 al segundo miembro de la ecuación)

$$y - 2 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad y - 2 + 2 = 7 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = 9$$

o también como: $y \overset{-2}{-\,2} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad y = 7 \overset{+2}{+\,2} = 9$

Ejemplo

Resolver la ecuación: $3x - 2 = 7$

Resolución:

Primero se suma 2 en ambos términos de la ecuación y después se dividen entre 3 los términos de la ecuación equivalente que resulta.

$$3x - 2 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2 + 2 = 7 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

Por transportación de términos el proceso sería:

$$3x \overset{-2}{-\,2} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad \underset{3\cdot}{3}x = 7 \overset{+2}{+\,2} = \underset{\div 3}{9} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{9}{3} = 3$$

Ejemplo | Resolver la ecuación: $\frac{x}{3} - 2 = 7$

Resolución:

Primero se suma 2 en ambos términos de la ecuación y después se multiplican por 3 los términos de la ecuación equivalente que resulta.

$$\frac{x}{3} - 2 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{3} - 2 + 2 = 7 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{3} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{3}\right)(3) = (9)(3) \quad \Leftrightarrow \quad x = 27$$

Por transportación de términos el proceso sería:

$$\frac{x}{3} \overset{-2}{-2} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\div 3}{\frac{x}{3}} = 7 \overset{+2}{+2} = \underset{3\cdot}{9} \quad \Leftrightarrow \quad x = (3)(9) = 27$$

Otra forma de resolver esta ecuación sería: primero multiplicar ambos miembros de la ecuación por el m.c.m de los denominadores, que es 3, y después transponer el término numérico que resulta en el miembro izquierdo:

$$\frac{x}{3} - 2 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad (3)\left(\frac{x}{3} - 2\right) = (3)(7) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x}{3} - 6 = 21 \quad \Leftrightarrow \quad x = 21 + 6 = 27$$

Ejemplo | Resolver la ecuación: $x\,(x + 2) + 5 = (x + 7)(x - 3)$

Resolución:

Para resolver esta ecuación se efectúan primeramente las multiplicaciones indicadas en cada miembro: $\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 5 = x^2 + 4x - 21$

Después se suprimen los términos que están en cada miembro:

$$\Leftrightarrow \quad 2x + 5 = 4x - 21$$

Ahora se traspone el término 5 al segundo miembro y el término $4x$ al primer miembro (así la variable aparece sólo en el primer miembro de la ecuación):

$\Leftrightarrow 2x - 4x = -21 - 5$ (enseguida se reducen los términos semejantes)

$\Leftrightarrow -2x = -26$ (enseguida se traspasa el factor -2)

$\Leftrightarrow x = -26 / -2$ (finalmente se calcula el cociente)

$\Leftrightarrow x = 13$ (y se obtiene la posible solución)

Nota: En los ejemplos anteriores no se ha comprobado que las soluciones obtenidas sean las correctas, sin embargo, para estar seguros de que la solución obtenida es la correcta se puede hacer la comprobación. Para esto se sustituye el valor de x en ambos miembros de la ecuación original y se realizan las operaciones indicadas para ver si coinciden los valores numéricos de ambos miembros, en caso afirmativo el valor de x encontrado será la solución de la ecuación. Para este ejemplo la comprobación será:

M.I. : $13\,(13 + 2) + 5 = (13)\,(15) + 5 = 195 + 5 = 200$

M.D. : $(13 + 7)(13 - 3) = (20)\,(10) = 200$

Por tanto, como M.I. = M.D. , entonces, $x = 13$ es la solución.

Ejemplo

Resolver la ecuación: $9x - (5x - 2) - x = 8 + (4 - 2x)$

Resolución:

Se eliminan los paréntesis aplicando el procedimiento estudiado, obtenemos:

$$\begin{aligned} 9x - 5x + 2 - x &= 8 + 4 - 2x \\ 3x + 2 &= 12 - 2x \\ 3x + 2x &= 12 - 2 \\ 5x &= 10 \\ x &= 10 / 5 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Comprobación:

M.I.: $(9)(2) - [(5)(2) - 2] - 2 = 18 - 8 - 2 = 8$
M.D.: $8 + [4 - (2)(2)] = 8 + 0 = 8$
$\therefore$ la solución es: $x = 2$

Ejemplo

Resolver la ecuación: $(2x + 1)(x - 4) + 13 = 2x^2 - 10x$

Resolución:

Primero hay que calcular el producto indicado

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + x - 4 + 13 &= 2x^2 - 10x \\ 2x^2 - 7x + 9 &= 2x^2 - 10x \\ -7x + 9 &= -10x \\ -7x + 10x &= -9 \\ 3x &= -9 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Comprobación:

M.I. = M.D

$$\begin{aligned} &(2(-3) + 1)(-3-4) + 13 = 2(-3)^2 - 10(-3) \\ &(-5)(-7) + 13 = (2)(9) + 30 \\ &35 + 13 = 18 + 30 \\ &48 = 48 \end{aligned}$$

$\therefore x = -3$

Ejemplo

Resolver la ecuación: $3x - [2(x + 5) - 4] = 7x$

Resolución:

Primero se eliminan los signos de agrupación y luego se resuelve la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} 3x - [2(x + 5) - 4] &= 7x \\ 3x - 2x - 10 + 4 &= 7x \\ x - 6 &= 7x \\ x - 7x &= 6 \\ -6x &= 6 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Comprobación:

M.I. = M.D

$$\begin{aligned} 3(-1) - 2[2(-1 + 5) - 4] &= 7(-1) \\ -3 - [2 \cdot 4 - 4] &= -7 \\ -3 - [8 - 4] &= -7 \\ -3 - 4 &= -7 \\ -7 &= -7 \end{aligned}$$

$\therefore x = -1$

En resumen:

Una ecuación de primer grado con una incógnita es una ecuación que puede ser reducida a la forma o modelo:

$$a\,x + b = 0 \qquad (a, b \in \Re \;\; ; \; a \neq 0)$$

y cuya solución única es: $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$.

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Resuelve las ecuaciones siguientes, y comprueba la solución

a) $2x - (1 - 6x) = 15$

b) $9 - (2m - 3) = 20 - 4m$

c) $n + (n + 7) = 27 - 2n$

d) $7p + (7 - p) - (p + 22) = 0$

e) $4 + (y + 3) = 2y - (5y - 27)$

f) $2w - 8 = 3(w - 2) + w$

g) $(v + 7) - 2v = 5v - (3v - 4)$

h) $6(r + 10) + 3(2r - 7) = -45$

i) $8t + 4(t - 2) = -2 - 6(2t + 9)$

j) $(x + 5)(x - 1) =$

A2) Resuelve, o despeja la incógnita en, las ecuaciones siguientes:

a) $x - (8x - 69) + (6x - 50) = 2x - (x - 5)\ 15$

b) $5x - 6 = 4(x - 1) + x$

c) $9x - (2x - 3) = 3(x + 1) + 4x$

d) $2y^2 + (-y + 8) = (2y + 3)(y - 4)$

e) $3w^2 - (w - 5)(w - 3) = 3w^2 + 1$

f) $\dfrac{2u - 7}{5} + \dfrac{u + 11}{2} = -4$

g) $2x - \{3 + [4x - (5 + 5x) + 2x]\} = 11$

Aplicación de las ecuaciones lineales a la resolución de problemas

En este apartado se verán problemas cuyo planteo y resolución conducen a ecuaciones de primer grado con una incógnita. La resolución de estos problemas no siempre es fácil y se requiere, por ende, de mucha práctica y, sobre todo, de ***actitudes positivas*** respecto a los problemas, además de ***conocimientos y competencias*** en el uso de ***estrategias*** generales y particulares de resolución.

Con relación a las actitudes positivas requeridas para enfrentar y aprender eficazmente la resolución de problemas matemáticos en particular, y de la vida en general, te recomendamos una práctica escolar cotidiana. Recuerda siempre que la actitud con que enfrentas la resolución de un problema juega un papel importante en los resultados que obtengas.

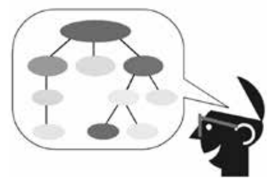
Por ejemplo, si tienes curiosidad, disposición de aprender, gusto por los desafíos, confianza en ti mismo, eres paciente y constante, estás ansioso por resolverlo y, además, tus condiciones físicas o de salud son las óptimas, es casi seguro que tendrás éxito en su resolución, en cambio, si estas en una situación contraria a todo lo anterior, lo más probable es que "fracases".

La mayoría de los problemas matemáticos escolares que enfrentarás en este curso, y en los siguientes, no requieren de muchos conocimientos para su resolución. Sin embargo, sí requieren de saber y poder razonar correctamente, además de tranquilidad, confianza y, sobretodo, constancia en la acción.

Si en el proceso de resolución te quedas atorado en algún momento no abandones inmediatamente el problema y **no desistas** ya que cada problema requiere su tiempo y tal vez la solución ya casi está a tu alcance. Sin embargo, si ya has evaluado y valorado que el plan de resolución del problema no te lleva por buen camino, concéntrate más en lo que estas haciendo y piensa en una nueva estrategia o en un nuevo planteamiento o enfoque de resolución del problema.

Como ya te habrás dado cuenta, aprender a resolver problemas es una actividad mental compleja que demanda de todas nuestras facultades mentales y físicas. En general, este proceso de aprendizaje es lento al principio, pero en la medida que se desarrolla y empieza a dar sus frutos proporciona grandes habilidades y satisfacciones que te ayudarán a pensar mejor, y a ser mejor estudiante y persona.

Aun cuando no existen reglas que aseguren el éxito en la solución de problemas, ni tampoco existe un camino único para resolverlos, el siguiente **Plan Heurístico General de Resolución de Problemas de George Polya (1887-1985)**, te proporciona un plan de acción compuesto por una serie de etapas metodológicas generales cuyas sugerencias de seguro te serán útiles en la formulación y resolución de los mismos:



ETAPA 1. Comprende el problema: Lee una o varias veces el enunciado del problema, hasta estar seguro de haber comprendido en qué consiste, o sea, hasta que tengas claro cuales son los datos, las incógnitas o las preguntas y las condicionantes de solución. Para lograr esto y poder enfrentar con altas posibilidades de éxito el problema es imprescindible que identifiques y discrimines bien la información relevante de la irrelevante.

ETAPA 2. Elabora un plan de acción: Una vez comprendido bien el problema y teniendo identificados los datos, las incógnitas y las condiciones, ha llegado el momento de seleccionar o elaborar una estrategia que consideres adecuada para resolverlo. Para un buen plan de acción necesitas conocer y practicar con un arsenal de estrategias, algunas de las cuales se presentan a continuación:

E1) Buscar semejanzas con otros problemas que hayas resuelto anteriormente…
E2) Hacer un dibujo o un esquema que muestre lo más relevante…
E3) Incorporar alguna incógnita o un trazo auxiliar…
E4) Elegir una buena notación que te facilite establecer las relaciones y realizar los cálculos…
E5) Trabajar mediante ensayo y error…
E6) Reducir lo complicado a lo simple…
E7) Considerar casos particulares del problema…
E8) Estudiar todos los casos posibles…
E9) Aprovechar las simetrías…
E10) Trabajar hacia atrás o de lo desconocido a lo conocido…
E11) Trabajar mediante razonamiento indirecto o por *reducción al absurdo*…
E12) Usar técnicas generales, como el principio de Inducción Matemática o el Principio del Palomar (si quieres repartir *n* palomas en menos de *n* cajas, entonces en alguna de las cajas tienes que poner al menos dos palomas)

ETAPA 3. Desarrolla el plan de acción: Ya que tienes el plan de acción ahora tienes que llevarlo a cabo. Trabaja la estrategia con decisión y no la abandones a la primera dificultad. Pero si ves que las cosas se complican demasiado y que no te acercas para nada a la solución, revisa tus ideas y los cálculos realizados hasta este momento, y si es necesario vuelve al paso anterior e intenta con una nueva estrategia, regularmente no se acierta al primer intento. Ya que tengas resultados o soluciones plausibles revísalos críticamente y mediante estimaciones breves cerciórate de que has llegado a soluciones congruentes con el enunciado del problema.

ETAPA 4. Verifica las soluciones, redacta las respuestas a las preguntas formuladas y, finalmente, reflexiona retrospectivamente y autocríticamente sobre todo el proceso: ¿Si has resuelto ya el problema..? ¡Felicidades! Sin embargo, verifica o comprueba bien de que has llegado a la solución correcta. No son pocas las veces que creemos haber resuelto un problema y luego nos damos cuenta de que estamos equivocados. Ya con las soluciones correctas, esfuérzate por redactar las respuestas a las preguntas, y de todo el proceso de resolución, de forma clara y ordenada, tal que pueda ser comprendida con facilidad por tu maestro(a) o compañero(a)s.

Por otro lado, si has pasado un largo rato intentándolo con ganas y sumo interés, y has acabado por no resolverlo, también en este caso ¡Felicidades! A veces se aprende mucho más de los problemas no resueltos, que de los que se resuelven fácilmente. ***Descansar acaso debas***... Ya después seguro que lo intentarás de nuevo. También en este caso, hacer una redacción describiendo el proceso que has seguido te ayudará a mejorar.

Por último, antes de abandonar el problema, sácale el máximo provecho al proceso de aprendizaje qué has vivido, y que tanto te ha costado. Para ello has una ***reflexión metacognitiva*** y un análisis retrospectivo global sobre los aciertos y errores. Una buena estrategia es que te formules y contestes preguntas como las siguientes: ¿Cómo he llegado a la solución? ¿Por qué funcionó la estrategia? ¿Qué me hizo seleccionar la estrategia correcta? ¿Se puede resolver de otro modo más directo y sencillo? ¿O, por qué no he llegado a la solución? ¿Si empecé bien al principio, dónde y por qué me equivoqué? ¿Por qué no pensé en esta otra estrategia? ¿Qué es lo que me oriento al escoger la estrategia equivocada?

La reflexión crítica repetida en torno a estos cuestionamientos te permitirá revisar el proceso de resolución del problema desde un principio tratando de comprender bien no sólo qué funciona y por qué funciona, sino también, lo que no funciona. Además, te familiarizara conscientemente con el método o estrategia de resolución, a fin de que puedas utilizarlo en problemas análogos futuros. Y también, esto es lo más importante, tomarás conciencia sobre tus propios procesos de pensamiento y estilo de aprendizaje, así como de tus gustos, potencialidades y limitaciones lo que redundara en el futuro en un mayor autoconocimiento y desarrollo personal e intelectual.

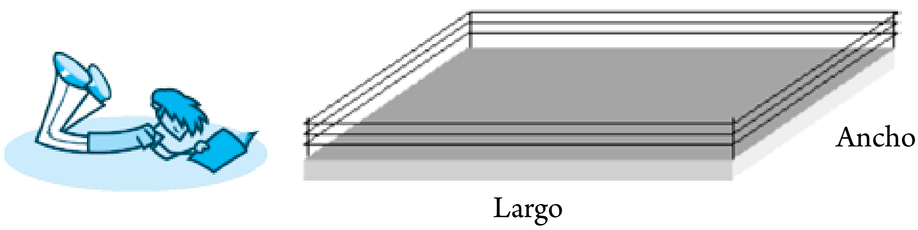
A continuación ilustramos con un problema particular la aplicación de algunas de las ideas anteriores

Problema (ilustrativo) 1

Para cercar un terreno rectangular con tres vueltas de alambre se utilizan 1530 metros. Determinar la superficie del terreno, si se sabe que el largo mide el doble que el ancho.

Proceso de resolución:

Fase 1. Comprender el problema: después de hacer una lectura de comprensión del problema, es claro que la *incógnita principal* es la superficie o área del terreno mientras que los datos son: el triple del perímetro del terreno, o sea 1530 metros, y además de que el largo del terreno es igual al doble del ancho. Podemos visualizar o representar gráficamente la situación planteada con el siguiente dibujo o esquema:



Fase 2. Elaborar un plan de resolución o acción: Esto implica definir la o las incógnitas. Por ejemplo: si llamamos "x" al ancho del terreno, y como el largo mide el doble que el ancho, entonces el largo debe quedar determinado por "$2x$". También implica llegar a determinar cuál o cuáles son las relaciones y operaciones matemáticas y la estrategia necesaria para resolver el problema. La *estrategia* en este caso es simple y directa: usaremos la fórmula para calcular el perímetro del rectángulo en función de sus lados de tal manera que, con el dato y las incógnitas sustituidas en ella, obtengamos de ahí la ecuación que nos relacione los datos con las incógnitas. Posteriormente resolvemos la ecuación para conocer las incógnitas secundarias (lado y ancho) de donde calcularemos la superficie del terreno.

Fase 3. Desarrollar el plan: esto es, relacionar los datos (del perímetro) y las incógnitas en torno a la fórmula del perímetro para plantear la ecuación resultante, así como, realizar las operaciones necesarias para resolverla. En este caso:

- Una vuelta de alambre equivale a un perímetro del rectángulo y resulta de sumar dos anchos (x) y dos largos ($2x$), o sea:

$$\text{Perímetro: } x + x + 2x + 2x = 6x$$

- Por lo tanto tres vueltas de alambre equivalen a: $(3)\,(6x) = 18x$
- Y esta longitud total de alambre, $18x$, equivale al dato dado en el problema, o sea: $18x = 1530$ m, de donde: $x = 1530/18 = 85$ m.

Fase 4. Verificar los resultados, dar respuesta a la pregunta y reflexionar sobre el proceso de resolución: Recordemos que "x" representa el ancho del terreno, y "$2x$" el largo, por lo tanto las dimensiones del terreno serían "85 metros de ancho y 170 metros de largo", ya que (comprobación): $(3)[(2)(85) + (2)(170)] = 1530$. Se concluye que el valor $x = 85$ es correcto.

Por tanto, ya que la pregunta del problema es sobre la extensión de la superficie del terreno, con las dimensiones ya determinadas la calculamos:

$$\text{Superficie o área del terreno} = (85\text{ m})\,(170\text{ m})$$
$$= 14,\,450\text{ m}^2$$

Finalmente, ***algunas reflexiones del proceso de resolución:*** en realidad este problema fue relativamente sencillo de resolver y se llegó pronto y en forma directa a la solución, sin embargo, no hay que olvidar que regularmente no sucede así. Por lo cual sería bueno que te formularas y respondieras preguntas como las siguientes: ¿Cómo se llegó a la solución? ¿Por qué funcionó la estrategia? ¿Se podrá resolver de otro modo más directo y sencillo utilizando otra estrategia?

Nota: en los problemas resueltos siguientes las diversas etapas del proceso de resolución están de forma implícita, por lo que sería bueno que hicieras el esfuerzo de explicitarlas en la medida que vas siguiendo dicho proceso.

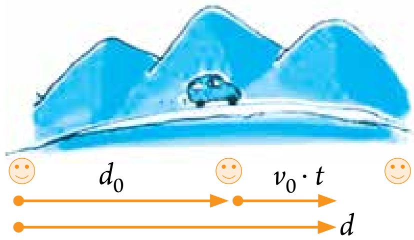
2) Un automóvil partió desde Culiacán (205 km. al norte de Mazatlán) hacia Los Mochis, con una velocidad promedio de 80 km/h. Determina: a) La ecuación general de su desplazamiento, b) ¿A qué distancia de Mazatlán se encuentra luego de una hora y media de viaje? y c) ¿Cuánto tiempo demora en llegar a Los Mochis, ciudad que se encuentra a 415 km. de Mazatlán?

Resolución:

a) De la física y geometría del problema consideramos que se trata de un ***movimiento rectilíneo uniforme*** donde la distancia o posición final $\boldsymbol{d}$ (respecto a Mazatlán) en que se encuentra el automóvil después de desplazarse durante un tiempo $\boldsymbol{t}$, partiendo de una posición $\boldsymbol{d_0}$(= 205) y con una velocidad (o rapidez) promedio $\boldsymbol{v_0}(= 80)$ viene dada en general por la ecuación: $\boldsymbol{d = d_0 + v_0 \cdot t}$. Por tanto, la ecuación general de movimiento es: $\boldsymbol{d = 205 + 80 \cdot t}$

b) Por tanto, después de hora y media de viaje está a: $d = 205 + (80)(1.5) = 325$ km. de Mazatlán. (Respuesta)

c) Cuando llega a Los Mochis $d = 415$, por tanto, $415 = 205 + 80 \cdot t$; de donde, el tiempo transcurrido fue de: $t = (415 - 205)/80 = 2.625$ horas de viaje. (Respuesta)



3) Un autobús sale de una ciudad A para otra ciudad B con una velocidad promedio de 80 km/h. Una hora después sale otro autobús de la misma ciudad A y en la misma dirección y destino que el anterior, con una velocidad promedio de 90 km/h. ¿Dentro de cuánto tiempo y a qué distancia de la ciudad A alcanzará el segundo autobús al primero?

Resolución:

Tiempo (en horas) para el alcance: t

Distancia recorrida por el primer autobús en t horas: $d_1 = 80t$

Distancia recorrida por el segundo autobús en t horas: $d_2 = 90t$

Cuando salió el segundo autobús (una hora después), el primero le llevaba 80 km de ventaja. Por tanto el planteamiento y resolución de la ecuación es:

$$d_2 = 80 + d_1 \quad \Leftrightarrow \quad 90t = 80 + 80t \quad \Leftrightarrow \quad 10t = 80 \quad \Leftrightarrow \quad t = 8$$

Comprobación: $90(8) = 720$ y $80 + 80(8) = 720$

Respuesta: El alcance será 8 horas después de la salida del segundo autobús, y será a una distancia de 720 km de la ciudad A.

4) El Sr. Martínez compró un automóvil de agencia en \$146,000.00. Si dicho costo incluye un 14.5 % de impuesto, ¿cuál era el precio del automóvil sin agregar el impuesto?

Resolución:

Sea P el precio del automóvil sin el impuesto e i el impuesto, por tanto:

$$P + i = \$\ 146,000.00 \quad \Leftrightarrow \quad P + (P)(0.145) = 146\,000$$
$$\Leftrightarrow \quad 1.145P = 146\,000$$
$$\Leftrightarrow \quad P = 146\,000 / 1.145 = 127\,510.9$$

Respuesta: El precio del automóvil sin agregar el impuesto es \$ 127,510.90.

5) Encontrar tres enteros consecutivos tales que su suma sea 72.

Resolución:

Sean a, b, c enteros tales que $a + b + c = 72$

Los designamos por: $a = x$, $b = x + 1$, $c = x + 2$

Planteamiento de la ecuación: $x + (x+1) + (x+2) = 72$

Solución de la ecuación: $x + x + 1 + x + 2 = 72$

$$3x = 69$$

$$x = 69/3 = 23$$

Luego: $a = 23$ $\quad b = 23 + 1 = 24$ $\quad c = 23 + 2 = 25$

Comprobación: $23 + 24 + 25 = 72$ $\quad 72 = 72$

Respuesta: Los números buscados son 23, 24 y 25.

6) Encontrar 3 números enteros consecutivos impares tales que su suma sea 69.

Resolución:

Sean a, b, c enteros impares tales que: $a + b + c = 69$

Los designamos por: $a = x, b = x + 2, c = x + 4$

Planteamiento de la ecuación: $x + (x+2) + (x+4) = 69$

Solución de la ecuación: $x + x + 2 + x + 4 = 69$

$$3x + 6 = 69$$

$$x = (69 - 6) / 3$$

$$x = 21$$

Luego: $a = x = 21,\quad b = 21 + 2 = 23,\quad c = 21 + 4 = 25$

Comprobación: $21 + 23 + 25 = 69$

Respuesta: Los números son 21, 23 y 25.

7) ¿Cuál es el número que, al aumentar en 20, se triplica?

Resolución:

Número pedido: x

El número aumentado en 20: $x + 20$

El triple del número pedido: $3x$

Planteamiento de la ecuación: $x + 20 = 3x$

Solución de la ecuación: $20 = 2x \iff 20/2 = x \iff 10 = x \iff x = 10$

Comprobación: $10 + 20 = 3(10)$ $\quad 30 = 30$

Respuesta: El número es 10

8) ¿Cómo se pagaría una deuda de \$700 con 52 monedas, unas de \$20 y otras de \$10?

Resolución:

Número de monedas de \$20 : x

Número de monedas de \$10 : $52 - x$

Valor de las monedas de \$20 : $20x$

Valor de las monedas de \$10 : $10(52 - x)$

Planteamiento y resolución de la ecuación: $20x + 10(52 - x) = 700$

$$\Leftrightarrow \quad 20x + 520 - 10x = 700 \quad \Leftrightarrow \quad 10x = 180 \quad \Leftrightarrow \quad x = 180/10 = 18$$

Comprobación: $20(18) + 10(52 - 18) = 360 + 340 = 700$

Respuesta: La deuda se pagaría con 18 monedas de \$20 y 34 monedas de \$10.

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

Resolver los siguientes problemas que conducen al planteo y resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

A1) Las calificaciones parciales de una alumna de Matemáticas II, en una escala del 0 al 100, son 78, 92, 85 y 80. ¿Con qué resultado en su quinto examen parcial tendrá posibilidades de obtener un promedio de 90?

A2) Una persona destinó una tercera parte de su salario mensual para comprar alimentos y la mitad del salario para diversos pagos; si le quedaron \$500.00 para ahorrar, ¿Cuánto gana mensualmente?

A3) Repartir \$3000.00 entre Arturo, Verónica y Carlos, de tal manera que la parte de Verónica sea el doble que la de Arturo, y la de Carlos sea el triple de la de Arturo. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

A4) La edad de Enrique es la mitad de la de Pedro; la de Juan es el triple de la de Enrique, y la de Eugenio es el doble de la de Juan. Si las cuatro edades suman 132 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

A5) Un camión de volteo carga siempre 2 toneladas más de su capacidad normal y en 36 viajes acarrea 252 toneladas de arena. ¿Cuál es su capacidad normal?

A6) Un comerciante dice: Si lograra duplicar mi dinero y pagara \$5,200.00 que debo, me quedarían \$8,000.00. ¿Cuánto dinero tiene el comerciante?

A7) La renta producida por dos casas en un año fue de \$157,000.00. ¿Cuál es la renta mensual de cada una, si entre sí difieren en \$2,500.00 y la de renta más alta estuvo desocupada 2 meses?

A8) Calcular los tres ángulos de un triángulo, sabiendo que el primero es el doble del segundo, y el tercero mide 12° más que el segundo. ¿Cuánto mide cada ángulo?

A9) Un obrero tenía \$20.00. Después de cobrar una semana (siete días) de trabajo, gasta 2/3 de su haber; pero diez días después vuelve a recibir su salario y posee \$426.00. ¿Cuánto gana ese obrero diariamente?

A10) El número de graduados de una preparatoria durante tres años consecutivos fue de 420 alumnos. En el segundo año se graduaron 40 alumnos más que en el primer año y en el tercer año tantos alumnos como los dos años anteriores. ¿Cuántos alumnos se graduaron cada año?

A11) Un hacendado ha comprado doble número de pollos que de patos. Por cada pollo pagó \$70.00 y por cada pato \$85.00. Si el importe de la compra fue de \$2,700.00. ¿Cuántos pollos y cuántos patos compró?

A12) Un capataz contrata un obrero por 50 días pagándole \$3,000.00 por cada día de trabajo con la condición de que por cada día que el obrero deje de asistir al trabajo perderá \$2,000.00. Al cabo de los 50 días, el obrero recibe \$90,000.00. ¿Cuántos días trabajó y cuántos días no trabajó?

A13) Una torre de perforación en el Golfo de México se coloca de manera que un quinto de su altura está en arena, 20 pies están en el agua y 2 tercios en el aire. ¿Cuál es la altura total de latorre?

A14) Un galgo persigue a una liebre que está a 60 metros de distancia. Si el galgo recorre 6 m/seg y la liebre 4 m/seg, y suponiendo que ambos animales se mueven sobre una misma trayectoria recta, ¿Cuánto tardará el galgo en alcanzar a la liebre?

A15) Dos jóvenes (A y B) parten al mismo tiempo de dos poblaciones distintas caminando el uno hacia el otro. Si B camina 1 km/h más aprisa que A, entonces se encuentran al cabo de 6 horas. Si la velocidad de A aumenta hasta igualarse con la de B (la velocidad de B permanece constante), entonces se encuentran al cabo de 5 ¼ horas. Calcular la distancia entre las dos poblaciones.

A16) Una persona cercó un terreno rectangular de 60 metros de frente y 400 metros de perímetro a un costo de \$37,200.00. Si el costo de la cerca de frente fue \$20.00 mayor por metro que el costo de los otros tres lados. ¿Cuál es el precio por metro en cada caso?

A17) La longitud de un campo rectangular excede a su ancho en 30 m. Si la longitud se disminuye en 20 m y el ancho se aumenta en 15 m el área se disminuye en 150 m^2. Hallar las dimensiones del rectángulo.

A18) ¿Cuántos gramos de sal tenemos que agregar a 57 gramos de agua para obtener una solución con el 5% de sal?

A19) Una tienda que está liquidando sus mercancías anuncia que todos los precios fueron rebajados en un 30%. Si el precio de un artículo es de \$186.00. ¿Cuál era su precio antes de la liquidación?

A20) ¿Cuál es el precio que un vendedor debe poner a un artículo que a él le cuesta \$1,200.00, para poder ofrecerlo con un descuento del 20% sobre el precio señalado y, todavía, ganar en la operación un 25% sobre el precio de venta?

1.4 Ecuaciones fraccionarias reductibles a ecuaciones lineales

En este apartado se resolverán ecuaciones que contienen fracciones algebraicas, es decir, donde la variable aparece en los denominadores de las fracciones (al menos en uno de ellas); a estas ecuaciones se les llaman **ecuaciones fraccionarias**. Se trata del caso de ecuaciones fraccionarias que conducen a ecuaciones lineales o de primer grado. Por ejemplo, la ecuación:

$$\frac{5}{x}+\frac{x-4}{3x}=4 \quad \text{es fraccionaria.}$$

En general, las ecuaciones fraccionarias se resuelven transformándolas en ecuaciones enteras, para lo que es necesario **eliminar los denominadores**. Para eliminar los denominadores en una ecuación fraccionaria se procede de la manera siguiente:

1) Se halla el mcm de los denominadores.
2) Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcm de los denominadores.

Ejemplo

Resolver la ecuación: $\frac{5}{x}+\frac{x-4}{3x}=4 \quad ; \quad x \neq 0$

Resolución:

Como el mcm de los denominadores es $3x$, se multiplican ambos miembros de la ecuación por $3x$, de donde resulta la siguiente ecuación entera:

$$3x\left(\frac{5}{x}+\frac{x-4}{3x}\right)=3x(4) \quad \Rightarrow 3x\cdot\frac{5}{x}+3x\cdot\frac{x-4}{3x}=12x \quad \Rightarrow 15+x-4=12x \quad \Rightarrow x=1$$

Ahora bien, la operación que hemos efectuado de multiplicar ambos miembros por el mcm de los denominadores, equivale a dividir el mcm de los denominadores por cada denominador y multiplicar cada cociente por el numerador respectivo. Así, en la ecuación anterior resulta:

mcm: $3x \quad ; \quad 3x \div x = 3 \quad ; \quad 3x \div 3x = 1 \quad ; \quad 3x \div 1 = 3x$

Por tanto, multiplicando los numeradores por los factores de ampliación:

$3\cdot 5 + 1(x-4) = 3x\,(4) \quad \Rightarrow \quad 15 + x - 4 = 12x$

Nota: Es importante tener presente que cuando ambos miembros de una ecuación fraccionaria se multiplican por el mcm de los denominadores, entonces se obtiene una ecuación equivalente a la dada, siempre que la solución obtenida no anule algún denominador de la ecuación original.

Ejemplo

Resolver la ecuación siguiente: $\frac{x-3}{x+1}=\frac{3}{5}$

Resolución:

Desde un inicio suponemos $x \neq -1$, puesto que anula un denominador.

El mcm de los denominadores es $5(x+1)$. Dividiendo el mcm $5(x+1)$ por cada denominador y multiplicando los numeradores por los factores de ampliación, resulta:

$$5(x-3)=3\,(x+1)$$

Resolviendo esta ecuación tenemos que:

$$5x - 15 = 3x + 3$$
$$5x - 3x = 15 + 3$$
$$2x = 18$$
$$x = 9$$

Comprobación:

M.I.: $\frac{9-3}{9+1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; M.D.: $\frac{3}{5}$; M.I = M.D. Luego: $x = 9$

Ejemplo

Resolver la ecuación: $\frac{2}{x} + \frac{1}{6} = \frac{5}{2x}$

Resolución:

El mcm de los denominadores es $6x$ y además $x \neq 0$.

$$(6)(2) + x(1) = (3)(5)$$
$$12 + x = 15$$
$$x = 15 - 12 = 3$$

Comprobación:

(M.I.) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{2 \cdot 3}$ (M.D) Luego: $x = 3$

$$\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$$

Ejemplo

Resolver la ecuación: $\frac{4}{x-2} = \frac{16}{x^2-4}$

Resolución:

Como $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$, luego el mcm es: $(x+2)(x-2)$. Al suprimir los denominadores resulta:

$$4(x+2) = 16$$
$$4x + 8 = 16$$
$$4x = 16 - 8$$
$$4x = 8$$
$$x = 2$$

Como puedes observar, el valor $x = 2$ es solución de la ecuación transformada $4(x+2) = 16$. Sin embargo, la ecuación original no tiene sentido para $x = 2$ y $x = -2$ ya que al sustituir por estos valores se anulan los denominadores y la división por cero no está definida.

En este caso, al suprimir los denominadores decimos que se ha introducido una **raíz extraña**, es decir, un valor que es solución de la ecuación transformada, pero que no lo es de la ecuación original. Luego, la ecuación original y la transformada no son equivalentes. Por tanto, la ecuación original es imposible ya que no tiene solución.

Ejemplo | Resolver la ecuación: $\frac{3}{x-1} + \frac{4}{x-6} = \frac{5x}{x^2 - 7x + 6}$

Resolución:

Factorizando el trinomio $x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$, luego el mcm es: $(x-1)(x-6)$; además $x \neq 1$, $x \neq 6$. Al suprimir los denominadores resulta:

$$\begin{aligned} 3(x-6) + 4(x-1) &= 5x \\ 3x - 18 + 4x - 4 &= 5x \\ 7x - 5x &= 18 + 4 \\ 2x &= 22 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Al comprobar en la ecuación original obtenemos: M.I. = M.D. = $\frac{11}{10}$. Luego: $x = 11$

Nota: Para tener certeza de que una ecuación está correctamente resuelta ya se dijo que debe siempre realizarse la comprobación de la solución hallada en la ecuación original, esto es aún más importante en las ecuaciones fraccionarias, donde la ecuación transformada corre mayor riesgo que en otros casos de no ser equivalente a la ecuación original.

Aplicaciones de las ecuaciones fraccionarias

Ejemplo | Un obrero puede hacer un trabajo en 3 días, mientras que otro obrero puede hacer el mismo trabajo en 5 días. ¿En qué tiempo lo harán trabajando conjuntamente? (Entiéndase días como jornadas de trabajo diarias).

Resolución: Designemos a los dos obreros con A y B, respectivamente y consideremos como x la cantidad de días que demoran en hacer el trabajo conjuntamente. Entonces:

	Días que demoran en hacer el trabajo	Parte del trabajo que hacen en un día
A	3	$1/3$
B	5	$1/5$
A y B	x	$1/x$

Puesto que la parte que hace el obrero A en un día más la parte que hace el obrero B en un día es igual a la parte del trabajo que hacen ambos en un día, resulta la ecuación:

$1/3 + 1/5 = 1/x$ (Suprimiendo los denominadores se tiene)

$5x + 3x = 15 \Rightarrow 8x = 15$

$\therefore\ x = 15/8$ (días trabajando en conjunto)

Comprobación: sumando las partes del trabajo que hacen en un día cada uno por separado se tiene: $1/3 + 1/5 = 8/15$. Mientras que la parte del trabajo que hacen en un día conjuntamente es: $\frac{1}{\frac{15}{8}} = \frac{8}{15}$. Ya que son iguales los resultados, se concluye que el trabajo lo terminarán conjuntamente en: 1 día, más 7/8 de otro día.

Ejemplo

La velocidad de la corriente de un río es 3 km/h. Un bote tarda el mismo tiempo en navegar 8 km a favor de la corriente que en navegar 5 km en contra de la corriente. ¿Cuál es la velocidad del bote en agua tranquila?

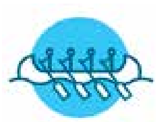
Resolución: Suponiendo que el bote navega con movimiento uniforme, podemos trabajar con la relación ya conocida $v = d/t$. Por tanto, si designamos con x la velocidad del bote en agua tranquila, entonces cuando navega a favor de la corriente (río abajo) la velocidad es $x + 3$ y en contra de la corriente (río arriba) es $x - 3$. De donde:

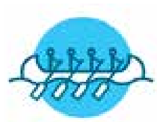
	Distancia	Velocidad	Tiempo
Río abajo:	8	$x + 3$	$8/(x+3)$
Río arriba:	5	$x - 3$	$5/(x-3)$

Puesto que el bote tarda el mismo tiempo en navegar 8 km río abajo que en navegar 5 km río arriba, se obtiene la ecuación: $8/(x+3) = 5/(x-3)$

Suprimiendo los denominadores, resulta:

$$8(x-3) = 5(x+3)$$
$$8x - 24 = 5x + 15$$
$$8x - 5x = 24 + 15$$
$$3x = 39$$
$$x = 13$$





Comprobación: Navegando río abajo el bote demora $8/(13+3) = 1/2$ hora.

Navegando río arriba el bote demora $5/(13-3) = 1/2$ hora.

Por tanto (**Respuesta**): La velocidad del bote en agua tranquila es de 13 km/h.

Ejemplo

El denominador de una fracción es 4 unidades mayor que el numerador. Si a cada término de la fracción se le agregan 5, la fracción resultante es equivalente a $2/3$. ¿Cuál es la fracción original?

Resolución: Si representamos por x el numerador de la fracción original, el denominador se podrá representar por $x + 4$. Si agregamos 5 unidades a cada uno, el nuevo numerador será $x + 5$ y el nuevo denominador, $x + 9$. Es decir:

	Fracción original	Fracción modificada
Numerador:	x	$x + 5$
Denominador:	$x + 4$	$(x+4) + 5 = x + 9$

Como la fracción resultante es equivalente a $2/3$, resulta la ecuación: $\frac{x+5}{x+9} = \frac{2}{3}$.

Suprimiendo denominadores en la ecuación fraccionaria anterior, se obtiene: $3(x+5) = 2(x+9)$

$$3x + 15 = 2x + 18$$
$$3x - 2x = 18 - 15$$
$$x = 3$$

De donde, el numerador de la fracción original es 3 y el denominador $3 + 4 = 7$.

Comprobación: sumando 5 al numerador y al denominador de la fracción 3/7 se tiene que: $\frac{3+5}{7+5} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Por tanto, la fracción original es 3/7.

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Resuelve las ecuaciones siguientes, y comprueba la solución:

a) $\frac{x-5}{4x} = \frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{x+3} = \frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{m-1} = \frac{6}{m+3}$ d) $\frac{2t+1}{t-1} = \frac{2t-5}{t-5}$

e) $\frac{4}{x} - \frac{x+2}{2x} = 1$ f) $\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = \frac{5}{2m+2}$ g) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$

h) $\frac{2m}{2m-3} = \frac{m+2}{m}$ i) $\frac{1}{y} + \frac{3}{5} = \frac{14}{5y}$ j) $\frac{2}{2x} + \frac{2x-1}{4x^2} = \frac{5}{12x}$

A2) Determina el valor de la variable que satisface las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{1}{x^2+2x} + \frac{1}{x} = \frac{4}{x+2}$ b) $\frac{16}{x^2-16} = \frac{2}{x-4}$ c) $\frac{2}{y-2} - \frac{1}{y-3} = \frac{1}{y^2-5y+6}$

d) $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{8}{4x^2-1} = \frac{2x-1}{2x+1}$ e) $\frac{2x-1}{x^2+3x} = \frac{3}{x+3}$ f) $\frac{2}{x-3x} = \frac{16}{x^2+2x-15}$

g) $\frac{4}{x-3} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x^2-9}$ h) $\frac{x}{x+1} - \frac{4x^2-7}{x^2-x-2} = -3$ i) $\frac{m}{x} + \frac{n}{m} = \frac{n}{x} + 1$

j) $\frac{1}{x+a} + \frac{x^2}{ax+a^2} = \frac{x+a}{a}$

A3) Dos bombas trabajan simultáneamente para llenar un estanque. La primera bomba trabajando sola, lo llenaría en 100 minutos; la segunda bomba en 5/2 horas. ¿En cuánto tiempo lo llenan trabajando juntas?

A4) Cierto trabajo puede ser efectuado por Aarón en 4 días, y por Arturo en 6 días. ¿Cuánto tiempo necesitarán para hacer todo el trabajo juntos?

A5) Una llave puede llenar un tanque en 2 horas, una segunda llave puede llenarlo en 3 horas, y otra llave puede vaciarlo en 6 horas. Si el tanque está inicialmente vacío y se abren simultáneamente las tres llaves. ¿Cuánto tiempo se necesitará para llenar el tanque?

A6) Aarón tardó en manejar 48 kilómetros el mismo tiempo que le llevó volar 620. La velocidad media del avión fue de 20 km/h, menos que 13 veces la velocidad del automóvil. ¿Cuál fue la velocidad media del avión?

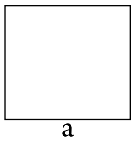
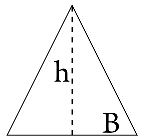
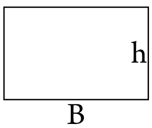
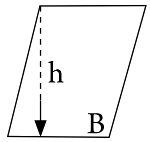
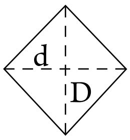
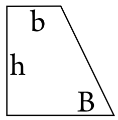
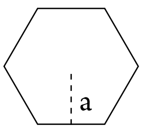
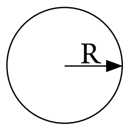
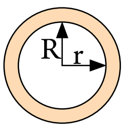
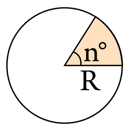
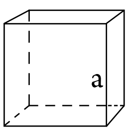
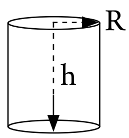
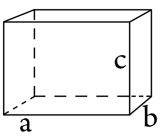
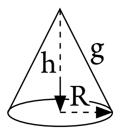
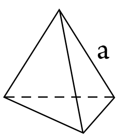
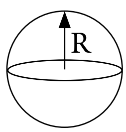
A7) La longitud de un campo rectangular excede a su ancho en 30 m. Si la longitud se disminuye en 20 m y el ancho se aumenta en 15 m el área se disminuye en 150 m^2. Hallar las dimensiones del rectángulo.

1.5 Ecuaciones literales lineales y despejes de fórmulas

Despeje en fórmulas

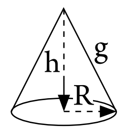
Como ya sabes una fórmula no es más que una igualdad entre expresiones algebraicas que expresan algún principio, regla o resultado general de índole matemático, físico o relativo a cualquier otra ciencia.

Desde grados anteriores ya has trabajado con fórmulas, ya sea en Matemáticas o en otras asignaturas como la Física. Por ejemplo, ya conoces fórmulas como las siguientes:

FÓRMULAS DE ÁREAS Y VOLÚMENES			
	Cuadrado $A = a^2$	Triángulo $A = B \cdot h / 2$	
	Rectángulo $A = B \cdot h$	Romboide $A = B \cdot h$	
	Rombo $A = D \cdot d / 2$	Trapecio $A = (B + b) \cdot h / 2$	
	Polígono regular $A = P \cdot a / 2$	Círculo $A = \pi \cdot R^2$ $P = 2 \cdot \pi \cdot R$	
	Corona circular $A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$	Sector circular $A = \pi \cdot R^2 \cdot n / 360$	
	Cubo $A = 6 \cdot a^2$ $V = a^3$	Cilindro $A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (h + R)$ $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$	
	Ortoedro $A = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ $V = a \cdot b \cdot c$	Cono $A = \pi \cdot R^2 \cdot (h + g)$ $V = \pi \cdot R^2 \cdot h/3$	
	Tetaedro rectangular $A = a^2 \cdot \sqrt{3}$ $V = a^2 \cdot \sqrt{2} / 12$	Esfera $A = 4 \cdot \pi \cdot R^2$ $V = 4 \cdot \pi \cdot R^3/3$	

En la práctica, se presenta muchas veces la necesidad de despejar un elemento particular en una fórmula dada para determinar su valor. Ahora bien, toda fórmula constituye una ecuación. Luego, ***despejar una variable en una fórmula no es más que resolver una ecuación donde la incógnita es la variable que se va a despejar.***

Ejemplo | Calcular la altura (h) de un cono de radio en su base de 3cm y cuyo volumen es de 340 cm^3.

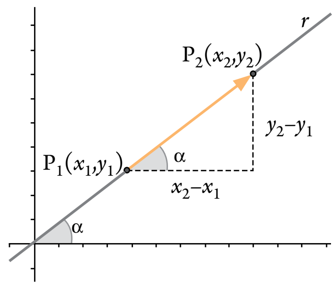


Resolución: De la tabla anterior se observa que el volumen del cono puede ser calculado con la fórmula: $\mathbf{V = \pi \cdot R^2 \cdot h/3}$. Por tanto, para poder calcular la altura del cono primeramente se tiene que ***despejar*** ésta de la fórmula anterior. Para hacerlo consideramos dicha fórmula como una ecuación lineal donde la incógnita es precisamente la altura h. O sea:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} \quad \Rightarrow \quad 3V = \pi R^2 h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V}{\pi R^2}$$

$\therefore$ *Sustituyendo los datos dados:* $h = \dfrac{3\,(340)}{\pi(2)^2} = \dfrac{1020}{(3.1416)(4)} = 81.17$ cm

Ejemplo | Se sabe que la pendiente $\left(m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$ de una recta que pasa por los puntos $P_1\,(3, -5)$ y $P_2\,(3, -5)$ es igual a 2. ¿Qué valor tiene la ordenada y_2?



Resolución: Primeramente hay que ***despejar*** la ordenada de la fórmula de la pendiente, y posteriormente sustituir los datos en la fórmula despejada y finalmente realizar los cálculos correspondientes.

O sea: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \Rightarrow \quad m\,(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = m\,(x_2 - x_1) + y_1$

$\therefore$ *Sustituyendo los datos y realizando los cálculos:* $y_2 = 2\,(-4 - 3) + (-5) = (2)(-7) - 5 = -14 - 5 = -19.$

Ejemplo | El primer término de una progresión aritmética es 0.8, la diferencia 0.3 y el enésimo término es 3.8. Hallar el número n de términos.

Resolución: Del curso de Matemáticas I sabes que el enésimo término de una progresión aritmética está determinado por la fórmula: $a_n = a_1 + (n-1)d$. Por tanto, considerando la fórmula como una ecuación lineal con incógnita n, su resolución o ***despeje*** sería:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \Rightarrow \quad a_n - a_1 = (n-1)d \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n - a_1}{d} = n - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = n$$

$\therefore$ *Sustituyendo los datos:* $n = \dfrac{3.8 - 0.8}{0.3} + 1 = \dfrac{3.0}{0.3} + 1 = 10 + 1 = 11$

En este apartado aunque se resuelven problemas sencillos de Física donde se enfatiza la manipulación algebraica, no debes quedarte con la impresión de que la Física es solamente una acumulación de fórmulas, donde se sustituyen datos y se realizan cálculos. La Física es mucho más que eso ya que en ella, partiendo de observaciones, razonamientos y experimentos se elaboran predominantemente explicaciones o descripciones teóricas de lo que ocurre en la naturaleza.

Así, pues, cuando los físicos analizan problemas de la naturaleza utilizan como herramienta principal a la matemática y, bajo ciertas condiciones e hipótesis, deducen expresiones o fórmulas (como las de las tablas de abajo) que relacionan unas magnitudes con otras.

Magnitudes Físicas de Mecánica	Fórmulas del movimiento Rectilíneo Uniforme	Fórmulas del Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado
Posición final: $s(t)$	$s(t) = s_0 + vt$	$s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$
Velocidad final: $v(t)$	$v(t) = v_0$	$v(t) = v_0 + at$
Aceleración: $a(t)$	$a(t) = 0$	$a(t) = a_0$

Otras Magnitudes Físicas de Mecánica	Fórmulas del Movimiento Rectilíneo Acelerado y de Dinámica
Velocidad media escalar (Rapidez)	$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$
Velocidad instantánea escalar (Rapidez instantánea)	$\dot{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$
Aceleración media	$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$
Aceleración instantánea	$\dot{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$
Fuerza = Masa × Aceleración	$F = m \cdot a$
Energía	$E = m \cdot c^2$

Ejemplo

¿Cuál es la aceleración media de un automóvil que en un tiempo de 4 segundos varía su velocidad de 20 km/h a 100 km/h?

Resolución: Este problema puede ser resuelto directamente con la fórmula de la aceleración media: $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{100 - 20}{4 - 0} = \frac{80}{4} = 20$ km/h/seg.

También, suponiendo que durante el tiempo que varió la velocidad la aceleración fue constante, el problema puede ser resuelto ***despejando*** la aceleración (a) de la fórmula $V(t) = V_0 + at$.

O sea: $V(t) = V_0 + at \quad \Rightarrow \quad V(t) = v_0 - at \quad \Rightarrow \quad a = \frac{V(t) - V_0}{t}$

$\therefore$ *Sustituyendo los datos:* $a = \frac{100 - 20}{4 - 0} = \frac{80}{4} = 20$ km/h /seg

Ejemplo

La temperatura es una magnitud física escalar referida a las nociones comunes de frío y calor (por lo general entre más *"caliente"* esté un material, tendrá una temperatura mayor y viceversa) y está determinada por una **función creciente** del grado de agitación, o de energía cinética media, de las partículas moleculares que componen los objetos. Y se mide con termómetros, los cuales pueden ser calibrados de acuerdo a diferentes puntos de referencia, lo que origina diversas escalas de medida que dan lugar a las unidades de medición de la temperatura.

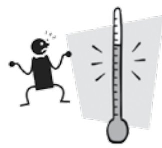
En el ámbito científico, y en el Sistema Internacional de Unidades, la unidad de temperatura es el kelvin. Sin embargo, en la vida cotidiana, el uso de otras escalas de temperatura es común como es el caso del uso de la escala Celsius (o centígrada) en México, y la escala Fahrenheit en los países anglosajones.

En la clase de termodinámica se establece que las escalas de temperaturas en grados Celsius (°C) y grados Fahrenheit (°F) están relacionadas por la ecuación lineal: $°F = \frac{9}{5}\,°C + 32$. Con base en esta información, determinar si a una persona que piensa viajar de la ciudad de Culiacán a la ciudad de Seattle, en EEUU, le conviene llevar mucha ropa de invierno, una vez que el servicio meteorológico de ese país pronostica una temperatura promedio de 50 °F durante su estancia en dicha ciudad.

Resolución: Para que la persona pueda tomar una decisión razonable en este caso, necesita saber, además de sus reacciones personales frente a las temperaturas, a cuántos grados centígrados equivalen 50 °F, para esto basta ***despejar*** los °C de la ecuación lineal dada como dato y hacer la sustitución y operaciones correspondientes:

$$°F = \frac{9}{5}°C + 32 \quad \Rightarrow \quad °F - 32 = \frac{9}{5}°C \quad \Rightarrow \quad 5\,(°F - 32) = 9°C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5\,(°F - 32)}{9} = °C \quad \therefore \quad °C = \frac{5\,(50 - 32)}{9} = 10 \quad ; \text{ o sea: } 50\ °F = 10°\ C$$



Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Despeja en cada fórmula o expresión, todas y cada una de las variables o constantes que aparecen en ellas:

a) $v = \frac{s}{t}$ b) $A_L = 2\pi rh$ c) $s = \frac{1}{2}gt^2$ d) $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ e) $\frac{a}{w} = \frac{b}{u} + \frac{1}{v}$

f) $s = \frac{ut - r}{t - 1}$ g) $R = \frac{2\,ab}{1 - 2b}$ h) $s = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$ i) $\frac{x}{m} = \frac{m - y}{x + y}$ i) $\frac{x}{3y} = \frac{a + 3y}{x - a}$

k) $n = \frac{t}{1 + t}$ i) $\frac{a}{b} = \frac{b - c}{a + c}$

A2) En las siguientes igualdades, despeja las variables que se indican y calcula su valor numérico para los valores que se dan en cada caso:

a) $N = \frac{p - m}{3k}$; (k) para $p = 10$, $m = 5.2$, $N = 0.8$

b) $B = \frac{5}{a + c}$; (a) para $B = 2$, $c = 1.5$

c) $S = \frac{a}{1 - q}$; (q) para $S = 4/3$, $a = 4/9$

d) $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$; (p') para $p = 5.4$, $f = 4.8$

e) $i = \frac{m}{m - b}$; (m) para $i = 9$, $b = 24$

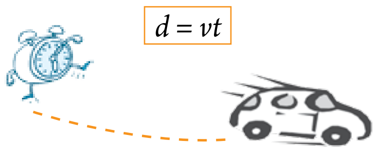
f) $F = \frac{\omega}{2r}(r + s)$; (r) para $F = 20$, $\omega = 5$, $s = 14$

g) $\frac{t}{M + t} = \frac{v}{n}$; (t) para $M = 8.4$, $v = 5$, $n = 11$

1.6 Introducción a las funciones y funciones lineales

Ahora estudiaremos un tipo de relación matemática, muy importante en las aplicaciones, denominadas ***funciones o modelos lineales***, las cuales son de interés no sólo en matemáticas sino también en administración, economía, física, ingeniería y en otros campos del conocimiento.

Por ejemplo, al determinar el salario de un vendedor, para planificar la ruta y tiempo de vuelo de un avión o para calcular la distancia recorrida por un automóvil y, en biología, para estudiar el crecimiento de algunos organismos.



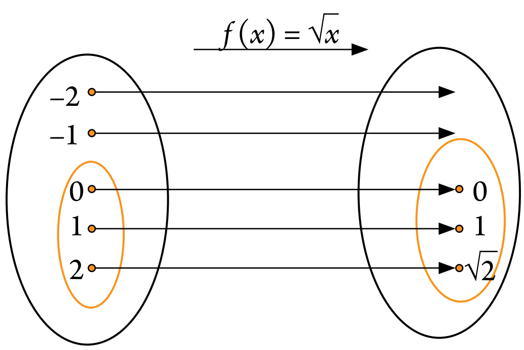
Antes de continuar es pertinente conocer y reflexionar en ¿Qué es en general una función matemática? y ¿Qué papel cumplen las funciones matemáticas en la interpretación de los diversos aspectos de la realidad?

El mundo natural y social está lleno de ***relaciones***. Por ejemplo: la velocidad de un auto es función de la distancia recorrida y del tiempo empleado, la lluvia depende de variaciones de la presión barométrica y lo bueno que eres bailando, jugando o estudiando matemáticas depende, entre otras variables, del esfuerzo que pongas y del tiempo que practiques.

*Las **funciones matemáticas**, en el sentido más simple y amplio, son relaciones numéricas que sirven para representar o modelar las relaciones existentes en el mundo.* Así, cuando una magnitud variable depende de otra, decimos que la primera es función de la segunda. Desde este punto de vista, la función puede concebirse como una relación de dependencia.

La función también puede concebirse como máquina, ya que existe una relación entre la entrada y la salida de una máquina, donde la salida depende de la entrada. Así la máquina-función recibe la entrada y la transforma en la salida.

Sí formalizamos y simbolizamos las ideas anteriores tenemos que una función, en matemáticas, es el término usado para indicar la relación o correspondencia entre dos o más cantidades variables. Así, si las dos variables "x" y "y" están asociadas de tal forma que al asignar un valor a x entonces, por alguna regla o correspondencia, se asigna automáticamente un valor único a y, se dice que y es una función de x. La variable x, a la que se asignan "libremente" valores, se llama variable independiente, mientras que la variable y, cuyos valores dependen de la x, se llama variable dependiente. El conjunto de valores permitidos de x constituyen el dominio de definición de la función y el conjunto de valores posibles para y constituye su recorrido, rango o contradominio.



Resumiendo: Una función (f) de dominio A y contradominio B (f: A $\to$ B, se lee "f de A en B") es una relación que le hace corresponder a cada elemento $x \in$ A uno y solo un elemento $y \in$ B, llamado **imagen** de x bajo f, y que se denota como $y = f(x)$. Es decir que para que una relación de un conjunto A en otro B sea función, debe cumplir dos condiciones, a saber: (1) Todo elemento del conjunto de partida A debe tener imagen en B. (2) La imagen $y \in$ B de cada elemento $x \in$ A debe ser única. Es decir, ningún elemento del dominio puede tener más de una imagen. El conjunto formado por todos los elementos $y \in$ B que son imagen de algún elemento del dominio se denomina también conjunto imagen de f.

La función lineal es de las más simples dentro de las formas que puede adoptar una relación entre variables, pero desempeña un importante papel en la formulación y resolución de una gran variedad de problemas tal como se muestra en los siguientes ejemplos.

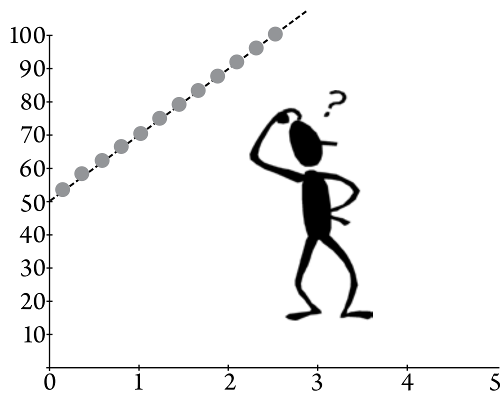
Ejemplo

Si analizamos la relación funcional $y = f(x)$ que existe entre el número (x) de teléfonos celulares vendidos diariamente por un vendedor, y el sueldo diario (y) que percibe por dicha venta la función ingreso es: $y = f(x)$; con $f(x) = 20x + 50$.

Donde: 50 es el salario (en pesos) mínimo diario del vendedor y 20 es la comisión (en pesos) por cada celular vendido.

La función ingreso es una función lineal, cuya representación tabular y gráfica es:

Número de celulares vendidos por día: x	Salario diario en pesos $y = f(x)$
0	\$ 50.00
1	70.00
2	90.00
3	110.00
4	130.00
5	150.00
6	170.00
10	250.00
15	$y = ?$



De la tabla y de la gráfica se puede observar que:

- Al aumentar el número de teléfonos vendidos, aumenta el sueldo del vendedor. O sea, es una función creciente.
- El salario mínimo diario del vendedor es, cuando no vende nada, de \$50.00
- El conjunto de valores permitidos para x (dominio de la función) son solamente enteros positivos, o sea el dominio de la función es: $D_f = \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$. De ahí que la grafica de arriba en realidad no deber ser continua (por qué).
- El conjunto de valores posibles para y (contradominio) es: $[50, \infty)$.
- La tasa de crecimiento $(m = a)$ es constante: $m = a = \dfrac{90 - 50}{2 - 0} = \dfrac{250 - 130}{10 - 4} = 20$

Una problemática importante, aparentemente diferente, es cuando una compañía de aviación planifica cuánto combustible necesitarán los aviones para los vuelos.

Ejemplo

Un Jet Boeing, que ha sido abastecido antes del despegue, contiene cerca de 28,000 litros de combustible y usa cerca de 5,000 litros por cada hora de vuelo. Aunque otros factores frecuentemente tienen un efecto, se puede considerar que la cantidad de combustible que tiene este avión está en función del tiempo de vuelo.

Se puede inferir, a partir de algunos cálculos particulares, una fórmula o función que dé lo que le queda de combustible al avión, como función del tiempo. Así:

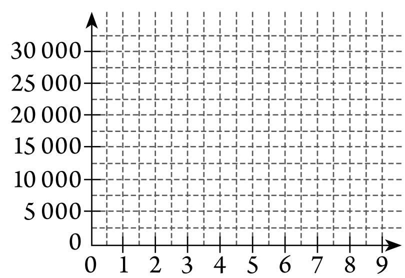
Tiempo t en horas	Litros de combustible en el avión $y = f(t)$
0	28000
1	$28000 - 5000 \times 1 = 23000$
2	$28000 - 5000 \times 2 = 18000$
t	$f(t) = 28000 - 5000t$

Usa esta fórmula para responder lo siguiente.

a) Completa la siguiente tabla que da lo que le queda de combustible al avión como función del tiempo transcurrido de vuelo.

Tiempo t en horas	Litros de combustible $y = f(t)$	Tiempo t en horas	Litros de combustible $y = f(t)$
0.0	28000	3.5	
0.5	25500	4.0	
1.0		4.5	
1.5		5.0	
2.0		5.5	
2.5		6.0	
3.0		6.5	

b) Dibuja un par de ejes coordenados parecidos a los que se muestran en la figura, y grafica en el los pares de datos (tiempo, litros de combustible), de la tabla anterior.



c) Usa la fórmula, tabla o gráfica para responder las siguientes preguntas acerca del combustible empleado por el Jet. Cuando sea apropiado, escribe una ecuación o desigualdad que pueda ser usada para responder a la pregunta dada.

1. ¿Qué tanto combustible queda después de 4.5 horas de vuelo?
2. ¿Qué tanto tiempo tomará para que se consuma la mitad del combustible?
3. ¿A qué tasa decrece el combustible del avión? Es decir, ¿cuál es el decrecimiento del combustible por cada hora adicional de vuelo?
4. ¿Qué tiempo de vuelo deja al menos 5000 litros de combustible en el avión (por seguridad)?
5. Si el avión viaja a 800 kilómetros por hora, ¿cuál es el viaje más largo que puede hacer, permitiéndole un margen de seguridad de 5 000 litros?

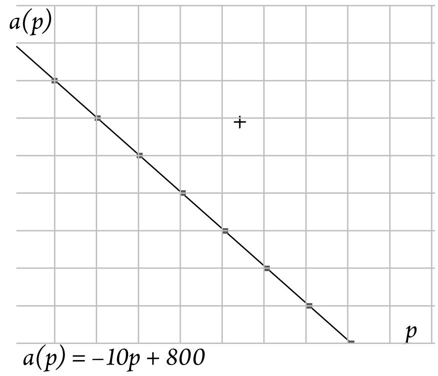
Ejemplo

La función lineal que relaciona el precio del boleto (p) y la asistencia $(a(p))$ a un festival escolar puede ser representada por la regla:

$$a(p) = -10p + 800 \ \ (\text{donde: } a = -10 \text{ y } b = 800)$$

y por la siguiente tabla o gráfica de pares de datos (precio, asistencia).

Precio p del boletos (pesos)	Asistencia $a(p)$
0.00	800
10.00	700
20.00	600
30.00	500
40.00	400
50.00	300
60.00	200
70.00	100
80.00	0



A partir de estos ejemplos podemos definir a una función lineal como una relación matemática que tiene la forma general:

$$f(x) = ax + b \quad ; \quad a \ \text{y} \ b \in \Re \quad , \ a \neq 0$$

Las funciones lineales se caracterizan porque tienen una tasa de cambio o pendiente constante $(m = a)$ y un cambio unitario en la variable independiente (x), provoca un cambio proporcional en la variable dependiente (y). Esto se puede demostrar, por ejemplo, para el primer ejemplo del vendedor de celulares

$$m = a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{90 - 50}{2 - 0} = \frac{170 - 110}{6 - 3} = \frac{250 - 130}{10 - 4} = 20 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta y = m \cdot \Delta x$$

Así pues, las funciones lineales relacionan varias clases diferentes de variables de diversas situaciones problemáticas, y pueden ser representadas por tablas, gráficas, fórmulas o ecuaciones, y, además, comparten algunas propiedades importantes, como las siguientes:

1. En una tabla de valores (entrada, salida), de una función lineal, el incremento de la variable de salida (y) se incrementa o (disminuye) a una tasa constante al incrementarse la variable de entrada (x).
2. La regla que relaciona las entradas y salidas de una función lineal puede ser escrita de varias maneras simbólicas diferentes, pero cada una es equivalente a la forma estándar: $f(x) = ax + b$, donde, a y b son números que son determinados por la situación problemática específica.
3. Los puntos de la gráfica de una función lineal yacen sobre una línea recta.

Un ***modelo matemático*** relacionado con la función lineal es el que surge al estudiar la proporcionalidad directa entre dos magnitudes variables. Recuerda que en la primera unidad del curso de Matemáticas I, aprendiste que si la variable y está relacionada en forma directamente proporcional a la variable x, entonces su razón o cociente indicado es una constante, o sea:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y}{x} = k \quad \Rightarrow \quad y = k\,x \quad \Leftrightarrow \quad y = m\,x + n \quad ; \quad \text{con } n = 0$$

De donde, la relación matemática $y = k\,x$, es un caso especial de la función lineal mediante la cual se representan muchas situaciones de la vida cotidiana, la ciencia y la ingeniería.

Ejemplo

Si para cocer medio kilogramo de verduras se requiere agregarle 25 gramos de sal. ¿Cuántos kg de verdura se necesitan para ocupar 1 kg de sal?

Resolución: Primero se establece la proporción o ecuación lineal que muestre la relación entre la cantidad de verdura y la cantidad de sal necesaria para un cocimiento de este tipo. Si representemos por G_V a los gramos de verdura y por G_s a los gramos de sal. Y recordando que medio kilogramo equivale a 500 gramos, entonces:

$$\frac{25}{G_s}=\frac{500}{G_V} \quad\Rightarrow\quad G_V=\frac{500}{25}G_s = 20\,G_s$$

Por tanto, los kilogramos de verduras requeridos para un kilogramo de sal son: $G_V = 20\,G_s = 20 \times 1 = 20$ kg.

Ejemplo

Según la Ley de Boyle, cuando la presión de un gas es constante, entonces el volumen (v) que ocupa es **directamente proporcional** a su temperatura absoluta (T): $v = k\,T$. Por tanto, si a una temperatura de 60 °K un gas ocupa un volumen de 30 m^3, ¿cuál es el volumen que ocuparía a una temperatura de 180 °K?

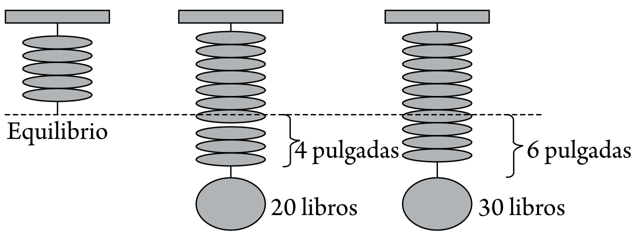
Resolución: para poder calcular el volumen con el modelo matemático $v = k\,T$ se necesita primero conocer la constante k con los datos proporcionados:

$$v = k\,T \quad\Rightarrow\quad k=\frac{v}{T}=\frac{30}{60}=0.5$$

Por tanto, el volumen que ocuparía el gas sería de: $v = 0.5\,T \Rightarrow v = (0.5)(180) = 90$ m^3.

Ejemplo

La Ley de Hooke para un resorte establece que el tamaño del alargamiento (o compresión) varía de forma directamente proporcional según sea la fuerza que se le aplique. Si una fuerza de 20 libras alarga el resorte 4 pulgadas:



a) Escribir una ecuación que relacione la distancia alargada con la fuerza aplicada.

b) ¿Cuánto alargará el resorte una fuerza de 30 libras y una fuerza de 100 libras?

Resolución:

a) Si d es la distancia que se alarga el resorte en pulgadas y F es la fuerza en libras. Como la distancia varía en forma directamente proporcional con la fuerza $d = k\,F$, y $d = 4$ y $F = 20$, entonces: $k=\frac{d}{F}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$. De donde, la ecuación que relaciona la distancia y la fuerza es: $d=\frac{1}{5}F$.

b) Por tanto, cuando $F = 30$ libras, la distancia que se larga el resorte es: $d=\frac{1}{5}(30)=6$ pulgadas. Y cuando $F = 100$ libras, la distancia correspondiente es: $d=\frac{1}{5}(100)=20$ pulgadas.

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Un vendedor de una empresa tiene un sueldo base semanal de n pesos y además por cada artículo vendido recibe una comisión de m pesos. Determinar el modelo matemático que permite calcular el salario semanal (y) del vendedor cuando vende x artículos por semana.

A2) Aplicando el modelo matemático obtenido en la actividad anterior, calcula la distancia (y) recorrida en un tiempo (x) de 3 horas por un automóvil que se desplaza a la velocidad constante (m) de 95 k/h.

A3) La Ley de Hooke para un resorte establece que el tamaño del alargamiento (o compresión) varía de forma directamente proporcional según sea la fuerza que se le aplique. Si una fuerza de 60 libras alarga el resorte 12 pulgadas: a) Escribir la función lineal que relacione la distancia alargada con la fuerza aplicada.

b) ¿Cuánto alargará el resorte una fuerza de 45 libras?

A4) En un recipiente con agua a 0°c se aplica calor para ir incrementando la temperatura. En dicho recipiente se encuentran al mismo tiempo, para medir la temperatura, un termómetro Celsius y uno Fahrenheit. La variación de la temperatura en ambos termómetros está registrada en la siguiente tabla, y partiendo de ella obtener la función lineal que relaciona la temperatura en ambas escalas.

Grados centígrados: °C	Grados Fahrenheit: °F
0	32
1	33.8
2	35.6
5	41
100	212

A5) En la práctica de la medicina es común que la dosis de un medicamento (y) varíe en forma directamente proporcional con el peso corporal (x) del paciente. Si a una persona de 56 kg se le suministran 250 mg de ampicilina, calcular la dosis recomendada a un paciente de 80 kg.

Definición y gráfica de la función lineal

Una función lineal es una relación matemática, o modelo matemático, que a cada $x \in \Re$ le hace corresponder un $y = ax + b$, donde: a y b son números reales dados y, además, $a \neq 0$.

En la función lineal el parámetro ***a*** recibe el nombre especial de pendiente. Es común representar las funciones lineales también con el modelo $f(x) = mx + n$. Por lo cual: $f(x) = ax + b \Leftrightarrow f(x) = mx + n$. En este texto usaremos ambas expresiones.

Así, los siguientes modelos matemáticos son ejemplos de funciones lineales:

$y = 50x + 1200$ $\quad (a = 50 \;;\; b = 1200)$ $\qquad y = -2x + 3$ $\quad (m = -2 \;;\; n = 3)$

$y = 95x$ $\quad (a = 95 \;;\; b = 0)$ $\qquad y = 4$ $\quad (m = 0 \;;\; n = 4)$

Cuando en una función lineal se quiere especificar la determinación de la variable y para un valor particular de la variable x resulta conveniente el uso de la notación funcional $y = f(x)$. Así, los valores de y correspondientes para $x = 4$, $x = -3$ y $x = 8.5$ en la función $y = -2x + 3$ pueden ser representados y calculados como:

$$y = f(4) = -2(4) + 3 = -8 + 3 = -5$$
$$y = f(-3) = -2(-3) + 3 = 6 + 3 = 9$$
$$y = f(8.5) = -2(8.5) + 3 = -17 + 3 = -14$$

Recordar qué en una función lineal, el conjunto de valores que puede tomar la variable "x" (llamada también como variable independiente) se denomina **dominio de la función**. Mientras que el conjunto de valores que puede tomar la variable "y" (llamada también como variable dependiente) se conoce como **contradominio de la función**. Así, en una función lineal el dominio y el contradominio es el conjunto de los números reales $\Re$.

Para representar gráficamente una función lineal se determinan mediante la ecuación $y = ax + b$ (o $y = mx + n$) las coordenadas "x" y "y" de al menos dos puntos $P(x, y)$ de su gráfica y se localizan en un sistema de coordenadas rectangulares.

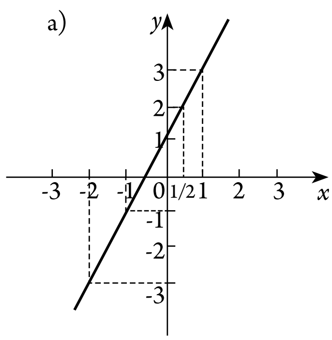
Ejemplo

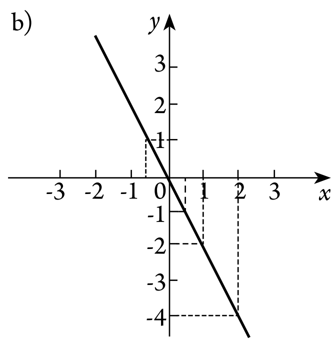
Representa gráficamente las funciones lineales definidas por:

a) $y = 2x - 1$ b) $y = -2x$ c) $y = 2$

Resolución: Primero determinamos en una tabla las coordenadas de algunos puntos de cada gráfica y, segundo, los representamos utilizando un sistema de coordenadas rectangulares y, finalmente, los unimos por una línea continua (ver fig. 1).

x	$y = 2x + 1$	$y = -2x$	$y = 2$
-2	-3	4	2
-1	-1	2	2
0	1	0	2
0.5	2	-1	2
1	3	-2	2





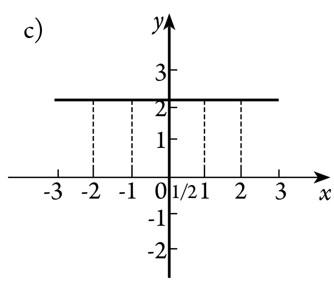


Figura 1

Como se observa en la Fig.1., si proyectamos sobre el eje Y las gráficas de las dos primeras funciones obtenemos como imágenes el conjunto $\Re$, mientras que en el caso de la función del inciso c obtenemos como imagen el conjunto $\{2\}$. En los 3 casos se pudo trazar una recta que pasa por los puntos representados.

Si para otro valor cualquiera de $x \in \Re$ obtenemos el valor correspondiente de y mediante las ecuaciones dadas, podemos comprobar que los puntos que tengan estas coordenadas también pertenecen a las rectas trazadas, por lo que llegamos a la conclusión siguiente: ***la gráfica de una función lineal es una recta.***

Si observas las ecuaciones correspondientes a las funciones lineales del ejemplo 1, notarás, en base al modelo $y = mx + n$, que en el inciso a) $m > 0$, en el b) $m < 0$ y en el c) $m = 0$ y que las rectas representadas tienen distintas posiciones respecto al eje X. Así si $m > 0$ la recta se inclina hacia la derecha, si $m < 0$ la recta se inclina hacia la izquierda, y si $m = 0$ la recta es paralela al eje X.

Además, estas rectas intersecan al eje Y en los puntos $(0, 1)$; $(0, 0)$ y $(0, 2)$ respectivamente, y los valores de n en las ecuaciones correspondientes coinciden con las ordenadas de estos puntos. En el inciso a) $n = 1$, en el b) $n = 0$ y en el c) $n = 2$. Luego el valor de n coincide con la ordenada del punto $(0, y)$ del gráfico de la función lineal dada.

A las funciones lineales como las del inciso c, cuyo conjunto imagen consta de un solo número se les llama **funciones constantes** y su gráfica es siempre una recta horizontal (paralela al eje X).

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Determina cuáles de las siguientes ecuaciones definen funciones lineales:

a) $y = -x - 2$ b) $y = \frac{x}{5}$ c) $y = x^2$ d) $y = \frac{3}{x} + 1$ e) $y = x^3 + 5$ f) $x + 2y = 8$

g) $y = \sqrt{2}$ h) $3x + y = 0$

A2) Dada la función lineal $f(x) = 5x - 2$

a) Calcula $f(0)$; $f(1)$ y $f(2)$

b) Determina x si $f(x) = 13$; $f(x) = 12$; $f(x) = -6$; $f(x) = -1$

c) Determina los valores de x y y para los cuales los puntos A $(x, -3)$, B $(2, y)$ y C $(1, y)$ pertenecen a la gráfica de f.

d) Representa gráficamente la función.

A3) Determina 3 puntos de las siguientes funciones lineales y traza su gráfica:

a) $y = x$ b) $y = -x$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x$ d) $y = -4x + 5$ e) $y = -0.2x$

f) $f(x) = x + 2$ g) $h(x) = 4x - 3$ h) $y = 0.5x + 1$ i) $y = 0.3x - 2$ j) $f(x) = -3$

k) $y = \frac{3}{2}$ l) $g(x) = 2 - x$

A4) Comprueba si los puntos siguientes pertenecen a la representación gráfica de la función $y = 8x + 3$.

a) $P_1\ (0, 2)$ b) $P_2\ (1, 11)$ c) $P_3\ (0, 3)$ d) $P_4\ (-1, 5)$

A5) Escribe las ecuaciones que definen las funciones representadas en la figura 2.

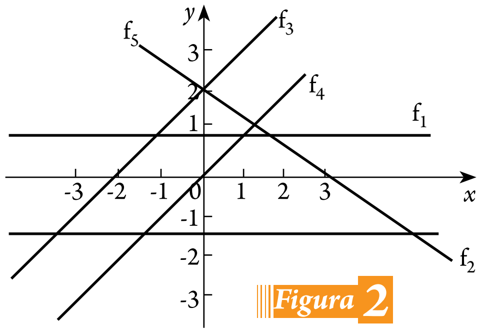


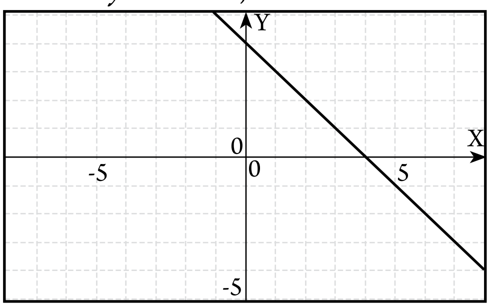
Figura 2

Gráficas y ceros de las funciones lineales

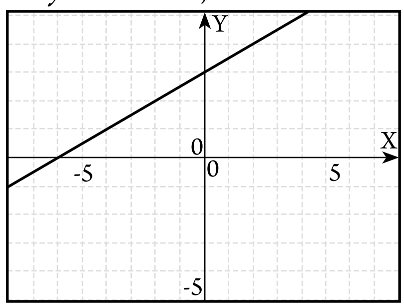
Para representar gráficamente una función lineal se acostumbra determinar los puntos donde la gráfica interseca a los ejes coordenados. El punto $(x, 0)$ es el punto donde la gráfica interseca al eje X. El valor de x se puede calcular sustituyendo $y = 0$ en la función lineal $y = mx + n$ de donde se obtiene la ecuación lineal correspondiente, $mx + n = 0$, cuya solución es $x = -n/m$ siempre y cuando $m \neq 0$. Al valor de $x = -n/m$ se le denomina **cero de la función**.

Observa que si $m \neq 0$ la función tiene un único cero, lo que significa que la gráfica de la función lineal corta al eje X exactamente en un punto, tal como se muestra en las gráficas de las funciones lineales siguientes:

$y = -x + 4$; cero: $x = 4$



$y = 0.5x + 3$; cero: $x = -6$



Ejemplo

Calcula los ceros de las funciones lineales siguientes:

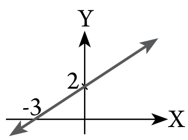
a) $y = \frac{2}{3}x + 2$ b) $y = -x + 4$ c) $y = 3x$

Resolución: sustituyendo $y = 0$ en cada una de las funciones tenemos

a) $\frac{2}{3}x + 2 = 0$

$2x = -2(3)$

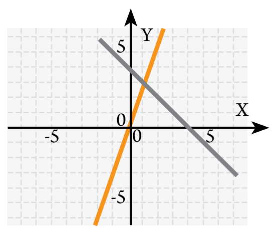
$x = -\frac{6}{2} = -3$



b) $-x + 4 = 0$

$-x = -4$

$x = 4$



c) $3x = 0$

$x = 0$

Aun cuando es recomendable localizar varios puntos para graficar una recta, sin embargo, dos puntos por los que ella pasa son suficientes para trazarla, por lo general son cómodos los puntos de coordenadas $(0, y)$ y $(x, 0)$ que son los puntos donde la recta interseca a los ejes coordenados.

Ejemplo

Representa gráficamente las funciones: a) $y = 2x - 4$ y b) $y = -x + 3$.

Resolución: primeramente determinamos los puntos $(0, y)$ y $(x, 0)$

a) $y = 2x - 4$

x	0	2
$y = 2x - 4$	-4	0

b) $y = -x + 3$

x	0	3
$y = -x + 3$	3	0

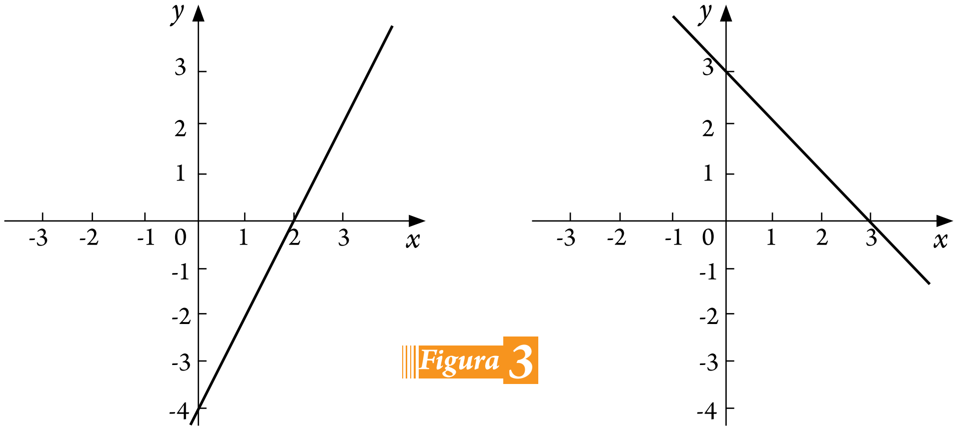


Figura 3

Como se observa en las gráficas anteriores los puntos donde la recta $y = 2x - 4$ interseca a los ejes coordenados son $(0, -4)$ y $(2, 0)$. Y los puntos donde la recta $y = -x + 3$ interseca a los ejes son $(0, 3)$ y $(3, 0)$.

Ahora consideremos el problema inverso, o sea, tenemos una recta y queremos determinar su ecuación. Como la recta es la gráfica de una función lineal, basta determinar los valores de m y n. Recuerda que n es la ordenada del punto donde la recta corta al eje Y. Mientras que el valor de m (la **pendiente** de la recta) indica, como ya sabes, la inclinación de la recta respecto al eje X.

Así pues, si los puntos P_1 y P_2 pertenecen a la recta considerada cuya ecuación es $y = mx + n$, entonces sustituyendo en la ecuación los valores de las coordenadas de los puntos tenemos:

$$y_2 = mx_2 + n \qquad \text{ecuación 1}$$

$$y_1 = mx_1 + n \qquad \text{ecuación 2}$$

Restando ambas ecuaciones:

$$y_2 - y_1 = mx_2 - mx_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad ; \quad (x_2 - x_1 \neq 0)$$

De donde tenemos el siguiente Teorema:

La pendiente m de una recta que pasa por los puntos $P_1\ (x_1, y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$ se calcula por la fórmula: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_2 \neq x_1$

Ejemplo

Una recta del plano coordenado pasa por los puntos A$(3, -2)$ y B $(5, 4)$.

a) Determina su pendiente.

b) Escribe la ecuación de la recta AB.

Resolución:

a) Sea $x_1 = 3$; $x_2 = 5$; $y_1 = -2$; $y_2 = 4$, entonces: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4-(-2)}{5-3} = \dfrac{6}{2} = 3$

b) Como $m = 3$, basta encontrar el valor de n en la ecuación $y = mx + n$, sustituyendo $x = 5$, $y = 4$ obtenemos: $4 = 3(5) + n$; luego: $n = 4 - 15 = -11$. Por tanto, la ecuación de la recta es $y = 3x - 11$, la cual se puede expresar también de la siguiente manera: $3x - y - 11 = 0$.

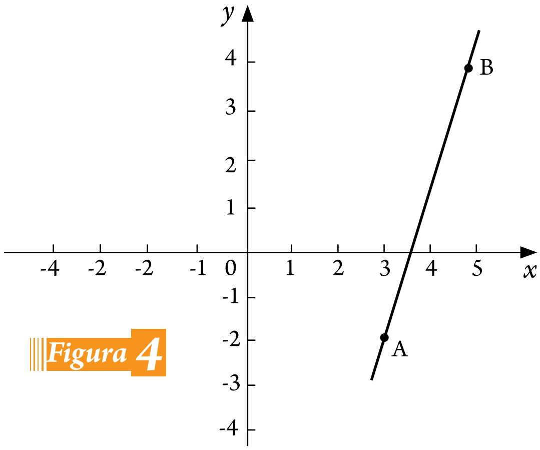


Figura 4

Ya conoces que la gráfica de una función lineal $y = mx + n$ es una recta. Observa que en toda ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ se puede despejar la y. Así obtenemos $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ si $b \neq 0$ y esta es precisamente la ecuación de una función lineal si consideramos $m = -\frac{a}{b}$ y $n = -\frac{c}{b}$. Luego:

> Toda ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ $(b \neq 0)$ define una función lineal

Además, tenemos también el siguiente teorema (el cual no demostraremos):

> Toda ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ con $x, y \in \Re$; a y b no simultáneamente nulos representa una recta en el plano coordenado.

En general, toda ecuación con una o dos variables representa una figura geométrica en el plano coordenado.

Ejemplo

Representa gráficamente la recta cuya ecuación es: $2x + y + 3 = 0$

Resolución: Basta determinar las coordenadas de dos puntos del plano para trazar la recta, consideremos $x = 0$, luego $y = -3$; si $y = 0$, entonces $x = \dfrac{3}{2}$; así tenemos los puntos $P_1(0, -3)$ y $P_2\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$, y la gráfica será la recta P_1P_2 (ver fig.5).

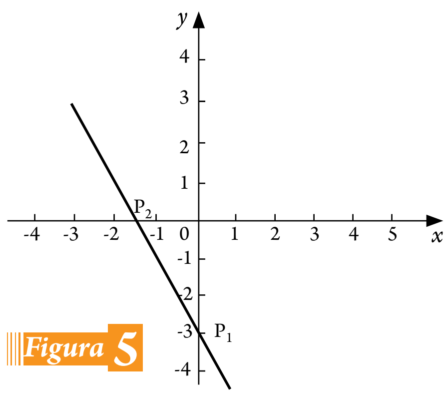


Figura 5

Como podrás observar en la recta del ejemplo 3 (fig.4), cuya pendiente es $m = 3 > 0$ la recta se eleva de izquierda a derecha, y los valores de la función correspondiente aumentan a medida que aumentan los valores de x, se dice entonces que la función es **creciente**.

Por el contrario, si observas la recta representada en el ejemplo 4 (fig.5), notarás que esta desciende de izquierda a derecha. La pendiente de esta recta es $m = -2 < 0$ y los valores de la función correspondiente decrecen a medida que aumentan los valores de la variable x, se dice en este caso que la función es **decreciente**.

Luego para $m \neq 0$ solo se presentan estos dos casos, es decir, las funciones lineales o son crecientes $(m > 0)$ o son decrecientes $(m < 0)$.

También hay que observar que la pendiente nos muestra la ***variación*** que hay en el eje "Y" a medida que aumenta una unidad en el eje "X". Así, la pendiente $m = 3$, nos indica que por cada unidad que aumenta en el eje "X" hay un aumento de tres unidades en el eje "Y".

Ejemplo

Dermina si las funciones lineales siguientes son crecientes o decrecientes:

a) $y = 2x + 0.5$ b) $y = -x + 4$ c) $y = 12 - 3x$

Resolución:

a) $m = 2 > 0$, luego la función es creciente.

b) $m = -1 < 0$, luego la función es decreciente.

c) $m = -3 < 0$, luego la función es decreciente.

Ejemplo

Determina la ecuación de la función cuyo gráfico aparece en la figura 6.

Resolución: Del gráfico se obtiene que $n = -2$, luego $y = mx - 2$ y para $x = 2$, $y = 0$ de donde $0 = 2m - 2$: por tanto $m = 1$. Así, la ecuación de la función es: $y = x - 2$.

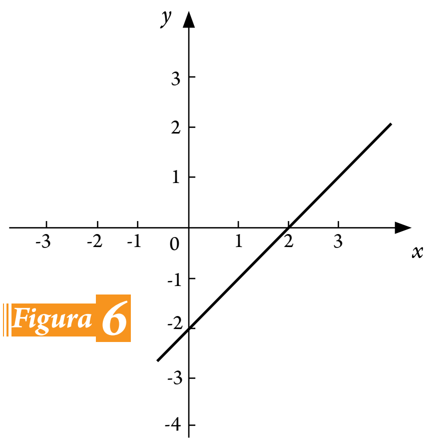


Figura 6

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) La gráfica de una función lineal pasa por el punto M (2, 4) y por el origen de coordenadas.

a) Escribe la ecuación que corresponde a dicha función.

b) ¿Está situado el punto B (−2, −4) sobre la gráfica de la función?

A2) Determina la ecuación de una función lineal cuya gráfica pasa por los puntos P(0, −2) y Q (−1, 3).

A3) En la función $y = mx + 3$. ¿Cuál debe ser el valor de m para que el punto P(2, 14) pertenezca a su gráfico?

A4) Calcula el valor de n si se sabe que el gráfico de $y = 3x + n$ pasa por el punto:

a) P (–2, 4) b) R (5, 2).

A5) Traza en un mismo sistema de coordenadas rectangulares las gráficas de las funciones $y = -0.5x - 2$; $y = 2x + 5$. E indica en cada caso 3 valores del dominio para los cuales las imágenes correspondientes sean positivas y 3 valores para los cuales sean negativas.

A6) Calcula el cero, en caso que exista, de cada una de las funciones lineales siguientes:

a) $y = x$ b) $y = -2x$ c) $y = 12x - 36$ d) $y = 10x + 8$ e) $y = 5 - x$

f) $y = 4 - 2x$ g) $y = -5x - 2$ h) $y = 0.8x - 16$ i) $y = \quad x + 0.3$

j) $y = \sqrt{3x} - \sqrt{3}$ k) $y = 2$ l) $y = 0$

A7) Dada la función $y = 4 - 2x$

a) Represéntala gráficamente.

b) Calcula el área de la figura formada por los ejes coordenados y la gráfica de la función.

c) Calcula la longitud del lado mayor de la figura determinada en el inciso b.

A8) Determina para qué valores de x la función:

a) $y = 5x + 8$ toma el valor 4. b) $y = 12 - x$ toma el valor $-\frac{2}{5}$

c) $y = -x$ toma el valor $\sqrt{3}$ d) $y = -2x - 5$ toma el valor 0.4

A9) Sea la función $y = 2x - 4$

a) Calcula su cero. b) Represéntala gráficamente.

A10) De una función lineal se sabe que su cero es – 4 y que interseca al eje Y en el punto de ordenada $-2\frac{1}{2}$. Represéntala gráficamente.

A11) En la figura 7 están representadas dos funciones lineales. Apoyándote en el gráfico determina las ecuaciones de dichas funciones.

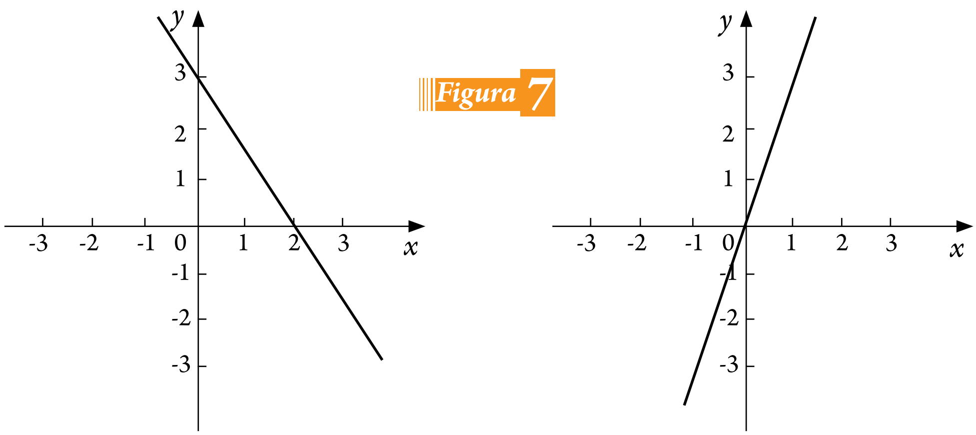


Figura 7

A12) Representa gráficamente la recta de ecuación:

a) $x + 3y - 5 = 0$ b) $3x - y - 12 = 0$

A13) Halla la pendiente de las rectas que pasan por cada uno de los pares de puntos siguientes y represéntalas gráficamente.

a) $(2, 5)$ y $(6, 11)$ b) $(2, -5)$ y $(0, 0)$ c) $(1, \frac{1}{3})$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

d) $(0, 0)$ y $(1, 4)$ e) $(3, 1)$ y $(8, 1)$ f) $(2, 4)$ y $(2, 0)$

A14) ¿Por qué no existe la pendiente de las rectas determinadas por los siguientes pares de puntos?

a) A $(3, 1)$ y B$(3, 4)$ b) M $(0, 0)$ y N $(0, 5)$

A15) Calcula la pendiente de las siguientes rectas:

a) $4x + 2y + 8 = 0$ b) $5x + y - 2 = 0$ c) $x - y - 3 = 0$ d) $3y = x$

1.7 Modelación matemática y aplicaciones de las funciones y ecuaciones lineales

Un ***modelo matemático*** es una descripción o relación cuantitativa, desde el punto de vista de las matemáticas, de un hecho o fenómeno del mundo real o científico, como pueden ser la descripción del crecimiento de la población de un ecosistema o la descripción del movimiento de un cuerpo físico, o hasta la descripción de fenómenos sociales, económicos y administrativos. El objetivo del modelo matemático es conocer y establecer las relaciones cuantitativas entre las "variables esenciales" del fenómeno y, tal vez, predecir su comportamiento de manera "exacta", aproximada o probable en el futuro.

Etapas básicas del proceso de construcción de un modelo matemático:

1. Encontrar y formular un problema del mundo real de interés susceptible de tratamiento matemático.
2. Construir o seleccionar, formulando hipótesis que hagan posible el análisis y tratamiento matemático de la problemática, un modelo matemático que describa el problema, identificando y estableciendo la relación entre las variables esenciales (dependientes e independientes).
3. Aplicar los conocimientos matemáticos (conceptos, métodos y algoritmos) que se posee para llegar a resultados y conclusiones matemáticas.
4. Comparar los datos obtenidos, como predicciones, del modelo con datos empíricos o reales. Si los datos son diferentes con márgenes de error inaceptables, se reinicia el proceso de modelación matemática.

Es importante enfatizar y reiterar que un modelo matemático es una representación abstracta, o idealización, de la realidad, por lo cual los resultados y conclusiones que se obtengan del mismo siempre deberán ser cotejados con los datos del problema real. De hecho, para un mismo problema real puede haber varios modelos matemáticos (ecuaciones y funciones) que los representen con diferentes márgenes de aproximación.

En base a las ideas anteriores podemos concebir las funciones lineales como modelos matemáticos (lineales) con una gran variedad de aplicaciones en diversos campos de la ciencia, la ingeniería, la economía y la administración. Por ejemplo, en el área económica-administrativa, algunas funciones como lo son las de ingresos, de costos y de utilidades pueden tratarse generalmente como funciones lineales tal como se muestra a continuación.

En economía y administración se conoce como ingreso, a la cantidad total de dinero que obtiene una empresa, u organización, debido a la venta de sus productos o a la prestación de sus servicios. En base a este concepto puede inferirse fácilmente que el ingreso total (I_T) de cualquier empresa dependerá directamente del precio (p) al que venda sus productos o servicios, así como de la cantidad (x) de servicios brindados o de productos vendidos. Si consideramos que el precio de todos los productos no varía o es el mismo, el ingreso total puede expresarse matemáticamente como:

$$\text{Ingreso Total} = (\text{precio})(\text{cantidad vendida}) \qquad \Leftrightarrow \qquad I_T = px$$

Ejemplo

Una empresa en la que se fabrican cargadores para teléfonos celulares vende a sus clientes mayoristas dichos cargadores a un costo de $150.00. Si para ser considerado como cliente mayorista necesitan hacer una compra de al menos 1000 productos. ¿Cuál será el ingreso menor que pudiera recibir el fabricante de un cliente mayoritario?

Resolución: $I_T = px = (\$150.00)(1000) = \$\ 150{,}000.00$

Cuando se venden diversos productos de precios diferentes, o cuando el precio de un mismo producto varía, el ingreso total sería la suma de los ingresos individuales obtenidos por cada producto o servicio al precio en que se vendió.

Ejemplo

Supóngase, considerando el ejemplo anterior, que además de vender la empresa 1000 cargadores a un mayorista vende 600 a un medio mayorista al cual le da un precio de $180.00. ¿Cuál será su ingreso total?

Resolución: $I_T = p_1x_1 + p_2x_2 = (\$150.00)(1000) + (\$180.00)(600) = \$\ 258{,}000.00$

Un aspecto preocupante para toda empresa es el de los diversos gastos o costos que implica el producir un producto o servicio. De ahí que los economistas, administradores y contadores consideren conveniente definir el costo total en términos de sus componentes, denominados como: ***costo variable y costo fijo.***

El ***costo fijo*** (C_f) es aquel costo que no varía significativamente con cambios en el nivel de producción. Por ejemplo: los gastos por agua, luz, teléfono y alquiler de local, entre otros, se consideran costos fijos. Por otra parte, los ***costos variables*** (C_v) son aquellos que dependerán directamente del nivel de producción. Por ejemplo: la materia prima y la mano de obra, entre otros, se consideran costos variables. La suma de ambos costos será el costo total (C_T) al que se produce determinado producto o servicio. De donde, la función costo puede representarse matemáticamente como:

Costo Total = (Costo variable por producto) (No. Productos) + Costo fijo

Ejemplo

Una empresa en la que se fabrican partes de computadoras tiene por concepto de pago de luz, agua y renta del local una cantidad mensual fija de $15, 000.00 y por concepto de materia prima aumenta su costo a razón de $2.50 por una cierta unidad producida y por concepto de mano de obra $ 1.30 por dicho producto. Calcular el costo total de la empresa si al final del mes la producción fue de 5,000 artículos.

Resolución: La función lineal utilizada en este caso para calcular el costo total (C_T), de x cantidad de unidades producidas, sería: $C_T = \$\ (2.50 + 1.30)\ (x) + \$15{,}000.00$

Por tanto, para una producción de $x = 5{,}000$ se tendrá un costo total de:

$$C_T = \$\,(2.50 + 1.30)\,(5000) + \$15{,}000.00 = \$19000 + \$15000 = \$34{,}000.00$$

Por último, en el caso de las empresas privadas lo que se busca finalmente es la obtención de ganancias o de utilidades positivas, las cuales se determinan por la diferencia existente entre el ingreso total (I_T) y el costo total (C_T). Matemáticamente la utilidad (U) puede ser calculada mediante la expresión:

$$U = I_T - C_T$$

Así pues, cuando el ingreso total es mayor que el costo total $(I_T > C_T)$ la utilidad resulta positiva y se conoce como ganancia, en caso contrario (o cuando $I_T < C_T$) la utilidad sería negativa y recibe el nombre de pérdida o déficit.

En caso de que la función de ingreso como la de costo sean funciones lineales de una misma variable, por ejemplo, de la cantidad (x) de artículos producidos o servicios brindados, entonces la función de la utilidad también será una función lineal de la misma variable. De donde, si el ingreso total fuera la función $I_T\,(x)$ y el costo total la función $C_T\,(x)$, entonces la función utilidad sería: $U\,(x) = I_T(x) - C_T(x)$.

Ejemplo

Una empresa produce y vende un artículo a un precio de \$150.00, si sus costos fijos mensuales son de \$ 400,000.00 y sus gastos por mano de obra son de \$20.00 por producto y por concepto de materia prima de \$30.00 por producto, determina la utilidad mensual de la empresa si su producción y venta mensual es de 10,000 artículos.

Resolución:

$$\text{Ingreso total} = \$150.00\,(x)$$

$$\text{Costo total} = \$50.00\,(x) + \$\,400{,}000$$

$$\begin{aligned}\text{Utilidad mensual} &= \$150.00\,(x) - [\$50.00\,(x) + \$\,400{,}000] \\ &= \$100.00(x) - 400{,}000 \\ &= \$\,100.00\,(10{,}000) - \$\,400{,}000 = \$\,600{,}000.00\end{aligned}$$

Otras situaciones problemáticas que pueden ser modeladas matemáticamente mediante las funciones lineales son: la determinación del sueldo de un vendedor, la depreciación, o pérdida de valor, de los objetos con el tiempo, la distancia de frenado de un automóvil, y muchas otras más, tal como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo

Un vendedor de una empresa tiene un sueldo base semanal de \$1200.00, y además por cada artículo vendido recibe una comisión de \$50.00. Y se quiere determinar el salario semanal del vendedor cuando vende 3, 5, 8, 10 y hasta x artículos por semana.

Modelación y resolución del problema:

Si el empleado vende 3 artículos, gana $3 \times \$50.00 = \$150.00$ por comisión. Por tanto, su salario semanal será la suma del sueldo base semanal con lo que gana por concepto de comisión: \$ (150.00 + 1200.00) = \$ 1350.00

Y cuando vende 5 artículos, gana $5 \times \$50.00 = \$250.00$ por comisión. Por tanto, su salario semanal será la suma del sueldo base semanal con lo que gana por concepto de comisión: \$ (250.00 + 1200.00) = \$ 1450.00.

En síntesis, si vende 8 ó 10 artículos el salario semanal del vendedor será respectivamente de:

$$8 \times \$50.00 + \$1200.00 = \$1600.00$$

$$10 \times \$50.00 + \$1200.00 = \$\ 1700.00$$

En general, si vende x artículos entonces el salario semanal y del vendedor será de:

$$y = 50x + 1200 \qquad x \in \mathbb{N}$$

Ejemplo

Un sistema de computación tiene 8 años de uso y su valor actual es de \$ 18 000.00, pero hace tres años su valor era de \$ 45 000.00. Si el valor del sistema varía linealmente con el tiempo, calcular: a) la función lineal que relaciona el valor del sistema con el tiempo transcurrido y b) el valor del sistema cuando era nuevo, además, c) el valor del sistema después de 10 años de uso.

Resolución: a) Sea $y = v$ el valor del sistema en el tiempo $x = t$, como v varía linealmente respecto a t, entonces, $y = mx + n$ o $v = mt + n$, por tanto para hallar esta función tenemos que calcular los parámetros m y n. Primeramente calcularemos la pendiente m considerando $P_1(x_1 = 5, y_1 = 45000)$ y $P_2(x_2 = 8, y_2 = 18000)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(18000)-(45000)}{(8)-(5)} = \frac{-27000}{3} = -9000$$

por tanto, $v = -9000\,t + n$, de donde se puede calcular n sustituyendo los valores(coordenadas) de cualesquiera de los puntos dados como datos. Sustituyendo los valores de tendremos que:

$$18000 = -9000\,(8) + n \quad \Rightarrow \quad n = 18000 + 9000\,(8) = 90{,}000$$

Por tanto la función lineal buscada es: $v = -9000\,t + 90\,000$.

b) Cuando el sistema era nuevo se tiene que $t = 0$, por tanto:

$$v = -9000\,(0) + 90\,000 = \$\ 90,000.00$$

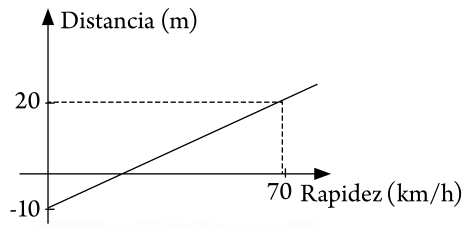
c) El valor del sistema después de 10 años de uso será:

$$v = -9000\,(10) + 90\,000 = \$\ 0.00$$

Ejemplo

Cuando manejamos un automóvil y frenamos, primero nos damos cuenta de que necesitamos detener el vehículo y después de un cierto tiempo de reacción se mueve el pie para pisar el pedal de freno. Así, experimentalmente se encontró la siguiente tabla que relaciona la distancia en que un automóvil se desplaza durante el tiempo medio de reacción para varias rapideces diferentes. Y también se hizo, con los datos de la tabla, una representación gráfica, como se muestra a continuación:

v = rapidez en km/h	d = distancia en metros
40	8
50	12
60	16
70	20
80	24
90	28



Otra manera de hacer un análisis del problema es establecer una relación matemática, tal como una proporción o ecuación lineal (lineal viene de línea recta), que relacione la distancia (d) con la velocidad (v). De la tabla se puede observar que por cada 10 metros que aumenta la velocidad la distancia para detenerse aumenta en cuatro metros, por tanto, existe una tasa de cambio o pendiente constante $(m = a)$ y un cambio en la variable independiente $(x = v)$, provoca un cambio proporcional en la variable dependiente $(y = d)$. O sea:

$$a = m = \frac{\Delta d}{\Delta v} = \frac{d_2 - d_1}{v_2 - v_1} = \frac{20 - 16}{70 - 60} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad \Delta d = \frac{2}{5} \cdot \Delta v$$

En particular, para que el automóvil pueda pararse casi instantáneamente (o sea que $d \approx 0$), debe desplazarse como máximo a una velocidad v_0 igual a:

$$20 - 0 = \frac{2}{5}(70 - v_0) \quad \Rightarrow \quad 100 = 140 - 2v_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{140 - 100}{2} = 20 \text{ km/h}$$

Y para que pueda frenar o pararse en una distancia d cuando viaja a una cierta velocidad v:

$$d - 0 = \frac{2}{5}(v - v_0) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{2}{5}(v - v_0) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{2}{5}v - \frac{2}{5}v_0$$

Sin embargo, anteriormente se calculó que $v_0 = 20$ km/h. De donde la ecuación lineal para calcular d es:

$$d = \left(\frac{2}{5}\right)v - 8 \quad ; \quad v \geq 20$$

Por ejemplo, si queremos saber qué distancia recorre un automóvil antes de detenerse después de frenar, cuando viaja a 97 km/h, bastará con sustituir en la ecuación el valor $v = 97$:

$$d = \left(\frac{2}{5}\right)v - 8 = \left(\frac{2}{5}\right)(97) - 8 = \frac{194}{5} - 8 = 38.8 - 8 = 30.8 \text{ m}$$

Actividades de aprendizaje de la unidad 1 para resolver en equipo

A1) Una empresa en la que se fabrican teléfonos celulares vende a sus clientes mayoristas dichos teléfonos a un costo de \$3250.00. Si para ser considerado como cliente mayorista necesitan hacer una compra de al menos 2000 teléfonos. ¿Cuál será el ingreso menor que pudiera recibir el fabricante de un cliente mayoritario?

A2) Supóngase, considerando el ejemplo anterior, que además de vender la empresa 2000 teléfonos a un mayorista vende 800 a un medio mayorista al cual le da un precio de \$3400.00. ¿Cuál será su ingreso total?

A3) Determine la función lineal del costo total en cada uno de los siguientes casos:

a) Costo fijo: \$ 350.00 ; y cuesta \$ 3000.00 producir 50 artículos.

b) Costo fijo: \$7280.00 ; y cuesta \$ 82,000.00 producir 40 artículos.

A4) Escriba una función de costo, para el cliente, en cada uno de los siguientes casos:

a) Una empresa que renta automóviles cobra \$200.00 diarios por automóvil más \$ 5.00 por kilómetro recorrido.

b) Un servicio de meseros y edecanes que cobra \$100.00 por salida de un miembro del personal más \$50.00 por cada hora trabajada.

A5) Una empresa en la que se fabrican computadoras tiene por concepto de pago de luz, agua y renta del local una cantidad mensual fija de $25, 000.00 y por concepto de materia prima aumenta su costo a razón de $1200.00 por cada computadora producida y por concepto de mano de obra $ 350.0 por dicho producto. Calcular el costo total de la empresa si al final del mes la producción fue de 3,000 computadoras.

A6) El costo de fabricar 200 relojes de pared a la semana es de $7000.00 y el de 240 relojes de pared a la semana es de $8000.00. Determina: a) la ecuación de costos total, suponiendo que varía linealmente. b) ¿Cuáles son los costos fijos y variables por unidad?

A7) A una compañía farmacéutica le cuesta $ 22,000.00 fabricar 250 dosis de un medicamento, mientras que producir 400 dosis le cuesta $ 35,000.00. Si el costo de producción del medicamento varía linealmente con la cantidad producida, calcular: a) ¿Cuánto cuesta producir 100 dosis del medicamento? ; b) los costos fijos de la compañía.

A8) Una empresa produce y vende un producto a un precio de $620.00, si sus costos fijos mensuales son de $ 35,000.00 y sus gastos por mano de obra son de $25.00 por producto y por concepto de materia prima de $80.00 por producto, determina la utilidad mensual de la empresa si su producción y venta mensual es de 15,000 artículos. Además, calcula la producción y venta mínima para que la empresa no tenga pérdidas.

A9) Una compañía de transporte público cobra $170.00 por transportar cierta mercancía 20 kilómetros y $200.00 por transportar la misma mercancía 25 kilómetros. a) Determine la relación entre la tarifa total y la distancia recorrida, suponiendo que es lineal. b) ¿Cuál es la tarifa mínima por transportar esta mercancía? c) ¿Cuál es la cuota por cada kilómetro que la mercancía es transportada?

A10) Un fabricante de videograbadoras advierte que a un precio de $2500.00 por unidad, las ventas ascienden a 1000 videograbadoras al mes. Sin embargo, a $2000.00 por unidad, las ventas son de 1400 unidades. Determine la ecuación de demanda suponiendo que es lineal.

A11) Un fabricante de útiles escolares puede vender 3000 lápices al mes a $2.00 cada uno, mientras que sólo pueden venderse 2000 lápices a $2.50 cada uno. Determine la ley de demanda, suponiendo que es lineal.

A12) Una compañía de bienes raíces posee un conjunto habitacional que tiene 100 departamentos. A una renta mensual de $700, todos los departamentos son rentados, mientras que si la renta se incrementa a $800 mensuales, sólo pueden rentarse 40 departamentos. a) Suponiendo una función lineal entre la renta mensual y el número de departamentos que pueden rentarse, encuentre esta función. b) ¿Cuántos departamentos se rentarán, si la renta mensual aumenta a $850? c) ¿Cuántos departamentos se rentarán, si la renta disminu¬ye a $650 mensuales?

A13) En el año 2000 una familia compró una casa con valor de $ 250,000.00; en el año 2007 la casa fue revalorada en $ 380,000.00. Suponiendo que el valor de la casa crece linealmente con el tiempo, determina: a) el valor de la casa en el año 2003; b)¿A partir de que año la casa tendrá un valor superior a los $500,000.00 ?

A14) Una empresa compró una máquina nueva por $25,000.00 Si se deprecia linealmente en $2500.00 al año y si tiene un valor de desecho de $4500.00, ¿Cuál será el valor V de la maquinaria después de t años de uso y después de 6 años de uso? ¿Por cuánto tiempo conviene tener la máquina en uso?

A15) Un vendedor de una empresa tiene un sueldo base semanal de \$2500.00, y además por cada artículo vendido recibe una comisión de \$80.00. Determinar el salario semanal del vendedor cuando vende 2, 5, 7, 12 y hasta x artículos por semana.

A16) La población infantil entre 4 y 14 años de edad de un cierto país decreció de 24.5 millones en 1985 a 21.7 millones en 1990.

a) ¿Cuál fue la razón de cambio promedio en esta población en el periodo dado?

b) Suponiendo una variación lineal de la población con el tiempo, determina una función lineal que describa esta población $\boldsymbol{y}$ en términos del año $\boldsymbol{x}$ para el periodo dado.

A17) De acuerdo con los datos arrojados por una investigación socioeconómica, el ingreso anual para una familia en extrema pobreza integrada por cuatro personas fue de \$5510.00 en 1990, \$8420.00 en 1995 y de \$13,360 en 2006.

a) Considere que $x = 0$ corresponde a 1990 y use los puntos (0,5510) y (16, 13360) para encontrar un modelo lineal para esos datos.

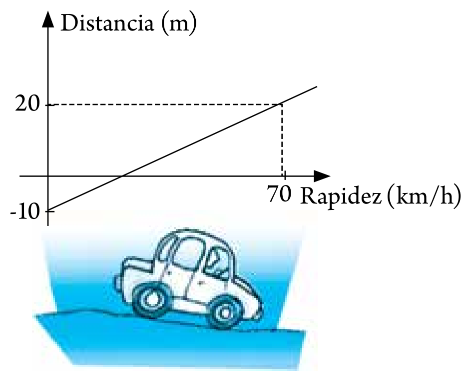
b) Compara el ingreso dado por el modelo para 1995 con el ingreso real de \$8420. 00 ¿Qué tan adecuado es el modelo?

c) ¿Qué tan exacto es el ingreso que da el modelo para 1985, cuando el ingreso real fue de \$3832?

d) De acuerdo con este modelo, ¿cuál será el ingreso anual para estas familias en el año 2008?

A18) De la siguiente tabla, y gráfica, obtenida experimentalmente donde se relaciona la distancia en que un automóvil se desplaza, después de frenar durante el tiempo medio de reacción, para varias rapideces diferentes. Determinar:

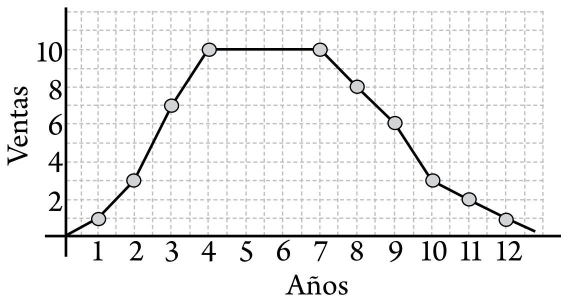
v = rapidez en km/h	d = distancia en metros
40	5
50	10
60	15
70	20



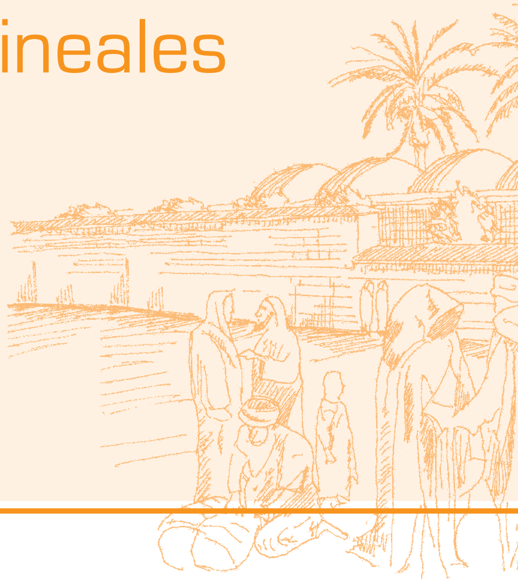
a) La velocidad máxima v_0 a que el automóvil debe desplazarse para que pueda pararse casi instantáneamente (o sea cuando $d \approx 0$). b) La distancia en que el automóvil pueda pararse cuando viaja a una cierta velocidad $v \geq v_0$. c) la distancia que recorre un automóvil antes de detenerse después de frenar, cuando viaja a 140 km/h.

A19) Un automóvil, cuyo tanque de combustible tiene una capacidad de 60 litros, tiene un rendimiento promedio en carretera de 14 km por litro. Considerando el tanque lleno, determine: a) La función que describe la cantidad de gasolina que hay en el tanque después de que el automóvil recorre x kilómetros por carretera. b) ¿Cuál es el máximo kilometraje que puede recorrer el automóvil sin recargar el tanque? c) ¿Cuántos litros de gasolina hay en el tanque después de que el automóvil ha recorrido una distancia de 0, 14, 28, 50 y 200 kilómetros? d) Represente gráficamente los resultados del inciso anterior, y a partir de dicha gráfica determine los litros de gasolina que hay en el tanque después de que el automóvil ha recorrido una distancia de 100 y 300 kilómetros. e) ¿Qué distancia ha recorrido el automóvil después de haber consumido 50.8 litros de gasolina?

A20) La gráfica siguiente muestra la variación de las ventas anuales (en unidades) de un cierto producto. Como se puede observar las ventas crecen primero lentamente hasta un pico, se mantienen constantes durante cierto tiempo y luego decrecen cuando el artículo pasa de moda. a) Calcula la pendiente o razón de cambio promedio anual en las ventas para los siguientes intervalos de tiempo en años: $[1, 2]$, $[1, 4]$, $[4, 7]$, $[7, 9]$, $[9, 10]$, $[10, 12]$ y $[7, 12]$; b) Con la hipótesis de que la variación de las ventas es lineal para los intervalos $[1, 4]$, $[4, 7]$ y $[7, 12]$, determine la función lineal correspondiente para estos intervalos.



2 Inecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales



Propósito de unidad

Resuelve y aplica las inecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales en la formulación y resolución de problemas de su vida cotidiana, y de algunas áreas de las ingenierías y las ciencias.

Contenido

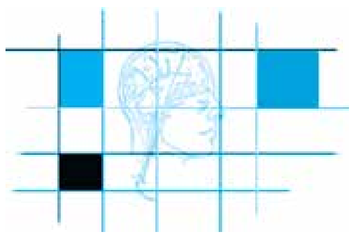
- **Desigualdades e inecuaciones lineales:** Introducción. Orden en los números reales y propiedades de las desigualdades. Intervalo, tipos de intervalos. Definición y resolución de inecuaciones lineales con una variable. Representación del conjunto solución por medio de intervalos. Definición y resolución (por el método gráfico) de inecuaciones lineales con dos variables. Interpretación geométrica de la solución de una inecuación lineal con dos variables. Definición y resolución (por el método gráfico) de un sistema de inecuaciones lineales con dos variables. Aplicaciones de las inecuaciones lineales.

- **Sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y de 3×3:** Planteamiento (y resolución de problemas) que den origen a sistemas de ecuaciones lineales. Definiciones y conceptos básicos de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales. Evaluación, tabulación, interceptos y representación gráfica de ecuaciones lineales. Interpretación geométrica de la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Método gráfico de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. Métodos analíticos de solución (suma-resta, sustitución, igualación y determinantes) de sistemas lineales de 2×2 y de 3×3. Planteo y resolución de problemas que conducen al planteo y solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Indicadores de desempeño

En esta unidad debe lograrse que los alumnos sean capaces de:

1) Reactivar sus conocimientos y habilidades sobre el orden y los intervalos en los números reales y aplicarlos en las desigualdades e inecuaciones lineales.
2) Localizar y/o representar pares ordenados en el plano coordenado, así como determinar las coordenadas de un punto representado en un sistema de coordenadas.
3) Conocer los conceptos básicos concernientes a las inecuaciones lineales y, resolver inecuaciones lineales con una variable y con dos variables (aplicando el método gráfico). Además, de plantear y resolver problemas que se resuelven mediante inecuaciones lineales.
4) Conocer los conceptos básicos concernientes a los sistemas de ecuaciones lineales.
5) Resolver sistemas de ecuaciones lineales aplicando los métodos gráfico (para sistemas de 2×2) y analíticos (de suma-resta, sustitución, igualación y por determinantes) para sistemas de 2×2 y 3×3. Además de plantear y resolver problemas que conduzcan a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
6) Resolver y aplicar sistemas de inecuaciones lineales.



2 unidad

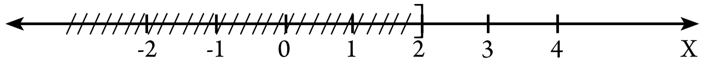
Actividad preliminar: ¿Qué es una desigualdad o inecuación? ¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales
Ver los siguientes videos:
http://www.youtube.com/watch?v=SPlxEjqOxUQ
http://www.youtube.com/watch?v=eMug3FSoOZk

En esta unidad profundizaremos en la relación de orden $\Re$ en a través del estudio de sus propiedades y su aplicación en la resolución de desigualdades y/o inecuaciones. Y pondremos énfasis especial en el planteo y resolución de problemas matemáticos y extra-matemáticos que requieren de modelos matemáticos como las inecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales.

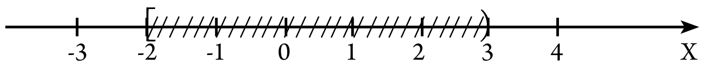
2.1 Desigualdades, intervalos y relaciones de orden en $\Re$

Interpretación y representación de desigualdades

Como ya sabes, la desigualdad $x \leq 2$ denota todos los números reales menores o iguales a 2, tal como se muestra en la figura siguiente:



La desigualdad $-2 \leq x < 3$ significa que $x \geq -2$ y $x < 3$. Esta "doble" desigualdad comprende a todos los números reales entre -2 y 3, incluyendo -2 pero sin incluir 3, tal como se muestra en la siguiente figura:



Las desigualdades, como ya estudiaste, se pueden utilizar para representar conjuntos de números reales. Por ejemplo:

- y es no negativo. Esto significa que y es mayor o igualdad que cero, lo que puede escribirse como: $y \geq 0$.

- z es negativo y mayor que -3. Como "z es negativo" puede escribirse $z < 0$ y "z es mayor que -3" puede escribirse como $-3 < z$. Combinando estas dos desigualdades se obtiene la doble desigualdad: $-3 < z < 0$.
- w no es mayor que 25. Esto significa que w es menor o igual que 25, lo que se escribe como: $w \leq 25$.
- r es mayor que 5 y menor o igual que 12. Tenemos dos desigualdades: $5 < r$ y $r \leq 12$, lo que se escribe como: $5 < r \leq 12$.

Propiedades de las desigualdades

En Matemáticas I estudiaste que las propiedades básicas de las desigualdades son:

Ley de tricotomía: para cualesquiera dos números reales a y b, únicamente es posible una de las tres relaciones: $a = b$; $a < b$ o $a > b$

En particular, para todo número real a, se cumple una y sólo una de las siguientes proposiciones:

$a = 0$; $a < 0$ o $a > 0$

Propiedades de orden en $\Re$. Sean a, b, c, d números reales, entonces:

* **Propiedad transitiva:** Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

* **Suma de desigualdades:** Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$

* **Suma (resta) de una constante:** Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$

* **Multiplicación (división) por una constante:**

Para $c > 0$, si $a <$ b, entonces: $a \cdot c < b \cdot c$ $(a/c < b/c)$

Para $c < 0$, si $a < b$, entonces: $a \cdot c > b \cdot c$ $(a/c > b/c)$

Nota: Estas propiedades son válidas también en los casos en que el signo < (menor que) se reemplaza por >, ≤ o ≥.

En los siguientes ejemplos se muestran algunas propiedades de las desigualdades:

Si $7 > 3$ entonces $7 + 4 > 3 + 4$	(suma de la constante 4)
Si $6 > 4$ entonces $18 > 12$	(multiplicación por $3 > 0$)
Si $3 < 5$ y $5 < 7$ entonces $3 < 7$	(transitividad)
Si $8 < 10$ entonces $-16 > -20$	(multiplicación por $-2 < 0$)
Si $m > n$ entonces $3m > 3n$	(multiplicación por $3 > 0$)
Si $a > b$ y $4 > 3$ entonces $a + 4 > b + 3$	(suma de desigualdades)
Si $a > b$ entonces $-a < -b$	(multiplicación por $-1 < 0$)
Si $x > y$ entonces $x - 5 > y - 5$	(resta de 5)
Si $21 > 7$ entonces $-3 < -1$	(división por $-7 < 0$)

A partir de estas propiedades básicas se puede demostrar que:

1) Si $a > 0$, entonces: $1/a > 0$. Y si $a < 0$, entonces: $1/a < 0$.
2) Si $a \cdot b > 0$, entonces: $a > 0$ y $b > 0$, o bien, $a < 0$ y $b < 0$.
   Si $a \cdot b < 0$, entonces: $a > 0$ y $b < 0$, o bien, $a < 0$ y $b > 0$.
3) $a \cdot b = 0$ si, y sólo si, $a = 0$ o $b = 0$ (**Nota:** esta propiedad se aplica en la resolución de ecuaciones de segundo grado por factorización)
4) Sean $a > 0$, $b > 0$; si $a > b$, entonces: $1/a < 1/b$.
5) Sean $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$; Si $a < b$ y $c < d$, entonces: $a \cdot c < b \cdot d$.

Actividades de aprendizaje

Demostrar que:

A1) Sean $a > 0$, $b > 0$, entonces: $(a + b)^2 > a^2 + b^2$

A2) Sean $a > 0$, $b > 0$, entonces: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} > 2$

A3) Sean $a > 0$, $b > 0$, $a \neq -b$, entonces: $\frac{a+b}{4a} > \frac{b}{a+b}$

A4) Si $x > 0$, entonces: $x + \frac{1}{x} \geq 2$

2.2 Valor absoluto de un número real

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** de a es: $|a| = \begin{cases} a, \text{ si } a \geq 0 \\ -a, \text{ si } a < 0 \end{cases}$

Ejemplos

$|7/25| = 7/25$

$|5| = 5$

$|-5| = -(-5) = 5$

En consecuencia, el valor absoluto de un número real es o bien positivo o bien cero. Más aún; 0 es el único número real cuyo valor absoluto es cero; así $|0| = 0$.

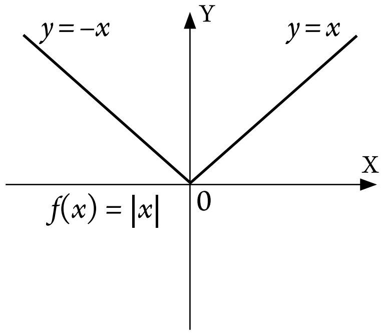
Por tanto, si x es un número real, entonces: $|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x > 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Propiedades de los valores absolutos

Sean a y b números reales, entonces: 1. $|a| \geq 0$ 2. $|-a| = |a|$ 3. $|a \cdot b| = |a||b|$ 4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{b}\right|$, $b \neq 0$

A partir de la definición de valor absoluto de un número real, se puede definir la **función valor absoluto** $f(x) = |x|$, con dominio $\Re$ y con conjunto imagen $\Re^+$.

$$f : \Re \to \Re^+$$
$$x \to |x|$$



La gráfica (ver figura de la derecha) está constituida por las semirrectas $y = x$ y $y = -x$ con origen común el punto $(0, 0)$.

Notas:

Si x es un número real también se puede definir valor absoluto de x como: $|x| = \sqrt{x^2}$ pues, como ya se estudió, $\sqrt{x^2}$ siempre es positivo.

Ejemplo | $|-2| = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ $\qquad$ $|5| = \sqrt{(5)^2} = \sqrt{25} = 5$

De igual manera, si x es un número real se puede definir valor absoluto de x como:

$$|x| = \text{máximo } \{x, -x\}$$

¡Observe que no necesariamente x es mayor que $-x$, en caso de que $x < 0$, su opuesto $-x > 0$ y en este caso $-x$ es el máximo!

Ejemplo | $|-2| = \text{máximo } \{-2, -(-2)\} = \text{máximo } \{-2, 2\} = 2$

$|5| = \text{máximo } \{5, -5\} = 5$

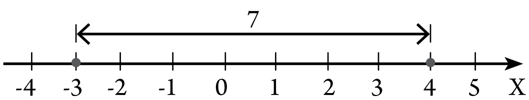
Cualquiera de las diferentes formas analíticas de definir la función valor absoluto de $\Re$ en $\Re^+$ son equivalentes y naturalmente la gráfica siempre es la misma; de hecho la gráfica es única y determina de forma unívoca la función.

Distancia entre dos puntos de la recta real

El valor absoluto puede utilizarse para definir la **distancia entre dos números** de la recta real. Por ejemplo, la distancia entre -3 y 4 es:

$$|4 - (-3)| = |7| = 7 \quad \text{ó} \quad |(-3) - 4| = |-7| = 7$$

como se muestra en la figura:



Por tanto, si a, b son números reales. La **distancia entre *a* y *b*** es: $d(a, b) = |b - a| = |a - b|$

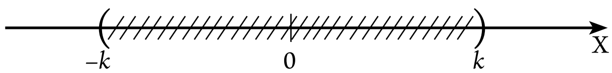
Ejemplo | La distancia entre -3 y el origen es: $d(-3, 0) = |-3-0| = |-3| = 3$

La distancia entre cualquier número real x y el origen es $|x - 0| = |x|$, es decir, $|x|$ señala la distancia de x al origen en la recta numérica.

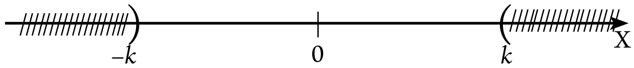
Interpretación del valor absoluto

I) Si $k > 0$ y $|x| = k$ entonces $x = k$ o $x = -k$

II) Sea $k > 0$, $|x| < k$ equivale a: $-k < x$ y $x < k$, o sea, $-k < x < k$, cuya interpretación geométrica es:



III) Sea $k > 0$, $|x| > k$ equivale a: $x < -k$ o $x > k$, cuya interpretación geométrica es:



Ejemplo

a) $|x| = 7$ entonces $x = 7$ o $x = -7$

b) $|x| < \sqrt{2}$ entonces $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

c) $|x| > 11$ entonces $x < -11$ o $x > 11$

d) $|x| \leq 6$ entonces $-6 \leq x \leq 6$

e) $|x| \geq \pi$ entonces $x \leq -\pi$ o $x \geq \pi$

Ecuaciones con valor absoluto

Ejemplo

Determinar los valores de x, donde se cumple: $|4x - 5| = 13$.

Resolución: Si $|4x - 5| = 13$, se tiene que:

$4x - 5 = 13$	o	$4x - 5 = -13$
$4x = 13 + 5$		$4x = -13 + 5$
$x = 18/4$		$x = -8/4$
$x = 9/2$		$x = -2$

Comprobación:

$\lvert 4(9/2) - 5\rvert = 13$	$\lvert 4(-2) - 5\rvert = 13$
$\lvert 18 - 5\rvert = 13$	$\lvert -8 - 5\rvert = 13$
$\lvert 13\rvert = 13$	$\lvert -13\rvert = 13$

La igualdad se cumple para $x_1 = 9/2$ y $x_2 = -2$.

Actividades de aprendizaje para resolverse en equipo

A1) Evalúa la expresión:

a) $|-6|$ b) $-6-|-5|$ c) $|-6|-|-7|$ d) $\frac{|7|}{7}$ e) $\frac{|-4|}{-4}$ f) $|5 - 12|$

A2) Coloca el símbolo correcto (<, > o =) entre los números:

a) $|-11| \square -|-11|$ b) $|-5| \square |5|$ c) $-7 \square -|7|$

d) $-|-3| \square |-3|$ e) $-|-4| \square -|4|$ f) $|-12| \square |9|$

A3) Encuentre la distancia entre a y b:

a) $a = 37, b = 53$ b) $a = -37, b = -53$ c) $a = 37, b = -53$

d) $a = 16/5, b = 98/15$ e) $a = 11.25, b = -7.65$ f) $a = -5, b = \pi$

A4) Usa notación de valor absoluto para describir la situación:

a) La distancia entre x y 7 no es mayor que 5 .

b) La distancia entre x y -8 es al menos 4 .

c) y está por lo menos 5 unidades a partir de 0 .

d) y está cuando mucho 3 unidades a partir de c.

A5) Haz la representación gráfica de las siguientes expresiones:

a) $|x| < 4$ b) $|x| \geq 3$ c) $|x - 5| > 2$ d) $|x - 6| < 3$

A6) Encontrar los valores de x, donde se cumple: $|2x + 4| = 6$

2.3 Desigualdades e intervalos

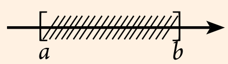
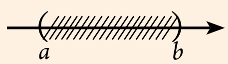
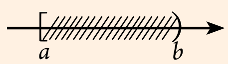
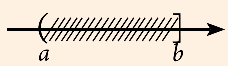
Los intervalos son muy útiles porque nos permiten interpretar y representar el conjunto solución de una desigualdad o inecuación. Por esta razón, aunque ya los estudiaste en Matemáticas I, hacemos aquí un repaso de ellos.

Sean a y b números reales tales que $a < b$, el conjunto de todos los valores de la variable x (x toma valores reales) comprendidos entre a y b, se llama **intervalo**.

El intervalo es un subconjunto de $\Re$ que no tiene "huecos", esto es, si un intervalo tiene por valores extremos a y b, si c es un número real tal que $a < c < b$, c pertenece necesariamente al intervalo. Esto significa, geométricamente, que un intervalo con extremos a y b se representa por un **segmento** de la recta real, con los puntos a y b como extremos, los extremos se incluyen o no (pueden pertenecer o no al intervalo) según sea el caso. Los intervalos se denominan cerrado, abierto o semiabierto, según contengan o no los extremos del intervalo.

Intervalos limitados en la recta real

Sean a y b números reales tales que $a < b$. Los siguientes intervalos en la recta real son **intervalos limitados**. Los puntos a y b son los **puntos extremos** de cada intervalo.

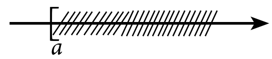
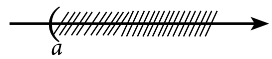
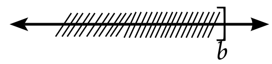
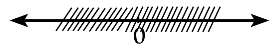
Notación	**Tipo de intervalo**	**Desigualdad**	**Gráfica**
$[a, b]$	Cerrado	$a \leq x \leq b$	
(a, b)	Abierto	$a < x < b$	
$[a, b)$	Semiabierto	$a \leq x < b$	
$(a, b]$	Semiabierto	$a < x \leq b$	

Nótese que un **intervalo cerrado** también contiene sus puntos extremos, que un **intervalo semiabierto** contiene sólo uno de sus puntos extremos, y que un **intervalo abierto** no contiene ninguno de sus puntos extremos, en todos los casos se trata de segmentos de la recta real.

Intervalos ilimitados en la recta real

A veces la solución de una desigualdad (el conjunto de todos los números reales que satisfacen la desigualdad) es un intervalo en la recta real que es ilimitado; por ejemplo, el intervalo de todos los números positivos es ilimitado.

Sean a y b números reales. Los siguientes intervalos en la recta real son intervalos ilimitados.

Notación	Tipo de intervalo	Desigualdad	Gráfica
$[a, \infty)$	Semiabierto	$x \geq a$	
(a, ∞)	Abierto	$x > a$	
$(-\infty, b]$	Semiabierto	$x \leq b$	
$(-\infty, b)$	Abierto	$x < b$	
$(-\infty, \infty)$	Toda la recta real	$-\infty < x < \infty$	

Los símbolos ∞ (**infinito positivo**), $-\infty$ (**infinito negativo**) no representan números reales. Sólo son símbolos útiles para describir lo ilimitado de un intervalo, como $(1, \infty)$, esto es, que este intervalo no está acotado superiormente.

En los cuatro primeros casos el intervalo se representa gráficamente por una semirrecta de la recta real (en unos casos contiene y en otros no el origen de la **semirrecta**), la semirrecta no tiene "huecos". En el último caso el intervalo es toda la recta real, cualquiera sea x ($x \in \Re$) es solución de la desigualdad.

Ejemplos **sobre Intervalos y desigualdades:**

Escribe una desigualdad para representar cada uno de los intervalos e indica si el intervalo es limitado o ilimitado.

a) $(-3, 5]$ b) $(-3, \infty)$ c) $[0, 2]$ d) $(-\infty, 4]$ e) $(-7, 9)$ f) $[0, \infty)$

Resolución:

a) $(-3, 5]$	corresponde a	$-3 < x \leq 5$	Limitado
b) $(-3, \infty)$	corresponde a	$-3 < x$	Ilimitado
c) $[0, 2]$	corresponde a	$0 \leq x \leq 2$	Limitado
d) $(-\infty, 4]$	corresponde a	$x \leq 4$	Ilimitado
e) $(-7, 9)$	corresponde a	$-7 < x < 9$	Limitado
f) $[0, \infty)$	corresponde a	$x \geq 0$	Ilimitado

¡En todos los casos haz la representación gráfica!

Actividades de aprendizaje

Utilizar la notación de valor absoluto para definir cada uno de los siguientes intervalos (o par de intervalos) en la recta real.

A1) $-2 \leq x \leq 2$

A2) $x < -2$ y $x > 2$

A3) $x \leq 6$ y $x \geq 12$

A4) $-6 \leq x \leq 2$

2.4 Inecuaciones lineales

Las desigualdades que **contienen variables** reciben el nombre de **inecuaciones** (aunque en esta unidad utilizaremos indistintamente los términos inecuación y desigualdad). Son ejemplos de inecuaciones las siguientes:

$$2x + 3 \leq 7\ ;\ x^2 + 3 > 5x\ ;\ 4x + 3y \geq 12$$

Solo estudiaremos algunos tipos de inecuaciones que contienen una variable.

Los procedimientos para resolver inecuaciones son muy semejantes a los de las ecuaciones. Para aislar la variable, usamos las propiedades de las desigualdades. Estas propiedades son similares a las de la igualdad, pero hay dos excepciones importantes. Cuando ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por un número negativo, el sentido del símbolo de desigualdad debe invertirse.

Ejemplos

a)

$-2 < 5$	Desigualdad dada.
$(-3)(-2) > (-3)(5)$	Multiplicar ambos lados por -3 e invertir la
$6 > -15$	desigualdad.

b)

$8 > 2$	Desigualdad dada
$\dfrac{8}{-2} > \dfrac{2}{-2}$	Dividir ambos lados por -2 e invertir la
$-4 < -1$	desigualdad.

Al igual que en una ecuación, una inecuación se resuelve en la variable x encontrando todos los valores de x para los cuales se cumple la desigualdad. Tales valores son **soluciones** y las soluciones **satisfacen** la desigualdad. El conjunto de todos los números reales que sean soluciones de una desigualdad conforma el conjunto **solución** de la desigualdad. Dos desigualdades que tengan el mismo conjunto solución son equivalentes.

Los conjuntos solución de muchos tipos de desigualdades están formados por intervalos en la recta real.

Para resolver inecuaciones son válidos los mismos pasos que para resolver ecuaciones:

- Suprimir paréntesis.

- Quitar denominadores.
- Pasar sumandos de un miembro a otro (está sumando, pasa restando; está restando, pasa sumando).
- Pasar factores o denominadores positivos de un miembro a otro (está multiplicando, pasa dividiendo; está dividiendo, pasa multiplicando).

La única diferencia es que, cuando la incógnita está multiplicada o dividida por un número negativo, por ejemplo en: $-3x < 11$. Se cambia el signo en los dos miembros y se invierte el sentido de la desigualdad:

$$-3x < 11 \quad \Rightarrow \quad 3x > -11 \quad \Rightarrow \quad x > -11/3$$

Estos pasos se basan en las propiedades de las desigualdades ya estudiadas. Recuerde que todas las propiedades de las desigualdades se cumplen si el símbolo $<$ se cambia por $\leq$. En definitiva, resolver una inecuación es reemplazarla por una cadena de inecuaciones equivalentes, hasta llegar a una en que la incógnita queda despejada. La aplicación de las propiedades de las desigualdades nos permite construir tal cadena de inecuaciones equivalentes.

Resolución de inecuaciones (desigualdades) lineales

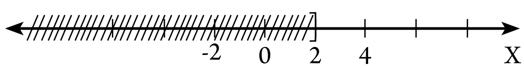
Ejemplo

Resuelve la inecuación: $1 - \dfrac{3x}{2} \geq x - 4$

Resolución:

$2 - 3x \geq 2x - 8$	Multiplica ambos lados por 2 para quitar denominadores.
$-3x \geq 2x - 10$	Resta 2 en ambos lados
$-5x \geq -10$	Resta $2x$ en ambos lados
$x \leq 2$	Divide ambos lados entre -5 e invierte la desigualdad.

Por tanto, el conjunto solución son todos los números reales menores o iguales que 2, la notación de intervalo será: $(-\infty, 2]$, cuya gráfica es:



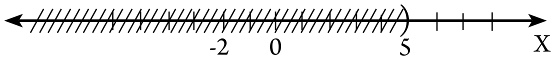
Comprobar el conjunto solución de una desigualdad no es tan sencillo como la solución de una ecuación; por lo general, hay demasiados valores de x para sustituir en la desigualdad original. Sin embargo, podemos obtener un indicio de la validez del conjunto solución si se sustituyen unos pocos valores convenientes de x. Por ejemplo, comprobemos que $x = 1$ satisface la desigualdad original y que $x = 3$ no la satisface.

Ejemplo

Resuelve la desigualdad: $4x - 3 < 2x + 7$

Resolución:

$4x - 3 < 2x + 7$	Desigualdad dada
$4x < 2x + 10$	Suma 3 en ambos lados
$2x < 10$	Resta $2x$ en ambos lados
$x < 10/2$	Divide ambos lados entre 2
$x < 5$	Conjunto solución

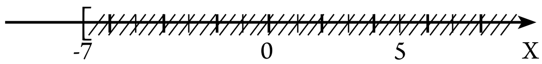
Respuesta: $(-\infty, 5)$ gráfica: 

Ejemplo

Resuelve la inecuación: $5(x-1)+5 \leq 7(x+2)$

Resolución:

$5(x-1)+5 \leq 7(x+2)$	Desigualdad dada.
$5x-5+5 \leq 7x+14$	Elimina paréntesis
$5x \leq 7x+14$	
$-2x \leq 14$	Resta $7x$ en ambos lados
$x \geq -7$	Divide ambos lados entre -2 e invierte la desigualdad.

Respuesta: $(-7, \infty)$ gráfica: 

A veces resulta conveniente escribir dos desigualdades como una desigualdad doble. Por ejemplo, puedes escribir las dos desigualdades $-8 \leq 3x-5$ y $3x-5<7$ en una forma más sencilla: $-8 \leq 3x-5<7$.

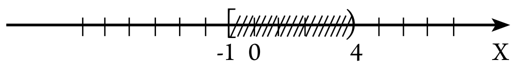
Esta forma te permite resolver juntas las dos desigualdades dadas.

Ejemplo

Resuelve la desigualdad doble: $-8 \leq 3x-5<7$

Resolución:	$-8 \leq 3x-5<7$	Desigualdad dada
	$-3 \leq 3x<12$	Suma 5 a las tres partes
	$-1 \leq x<4$	Divide entre 3 y simplifica

El conjunto solución está formado por todos los números reales que sean mayores o iguales que -1 y menores que 4. En notación de intervalo: $[-1, 4)$, cuya gráfica es:

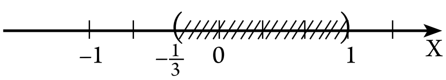


Ejemplo

Resuelve la inecuación: $-3+2x<4-5x<6+x$

Resolución lado izquierdo:	**Resolución lado derecho:**
$-3+2x<4-5x$	$4-5x<6+x$
$2x+5x<4+3$	$-5x-x<6-4$
$7x<7$	$-6x<2$
$x<1$	$x>-1/3$

Conjunto solución: $-1/3<x<1$. En notación de intervalo: $(-1/3, 1)$.

Representación gráfica: 

Resolución de inecuaciones lineales que incluyen valor absoluto

Recuerda que si $k>0$, entonces:

$|x| \leq k$ si, y sólo si, $-k \leq x \leq k$

$|x| \geq k$ si, y sólo si, $x \leq -k$ o $x \geq k$

El signo $\leq$ se puede sustituir por $<$ (respectivamente $\geq$ por $>$). Estas reglas serán utilizadas en la solución de inecuaciones que contienen valores absolutos.

Ejemplo

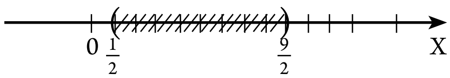
Resuelve la desigualdad: $|2x - 5| < 4$

Resolución:

$\|2x - 5\| < 4$	Desigualdad dada
$-4 < 2x - 5 < 4$	Desigualdades equivalentes
$-4 + 5 < 2x - 5 + 5 < 4 + 5$	Suma 5 a las tres partes
$1 < 2x < 9$	
$1/2 < x < 9/2$	Divide entre 2 y simplifica

En notación de intervalo: $(1/2, 9/2)$

Representación gráfica:



Ejemplo

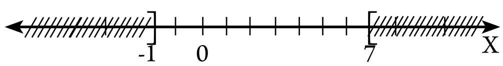
Resuelve la inecuación: $|3x - 9| \geq 12$

Resolución:

$\|3x - 9\| \geq 12$		Desigualdad dada	
$3x - 9 \geq 12$	o	$3x - 9 \leq -12$	Desigualdades equivalentes
$3x - 9 \geq 12$		$3x - 9 \leq -12$	''
$3x \geq 12 + 9$		$3x \leq -12 + 9$	''
$3x \geq 21$		$3x \leq -3$	''
$x \geq 21/3$		$x \leq -3/3$	''
$x \geq 7$		$x \leq -1$	

La solución de la inecuación consta de dos intervalos $[7, \infty)$ y $(-\infty, -1]$. Utilizando la notación conjuntista el conjunto solución es: $(-\infty, -1] \cup [7, \infty)$

Representación gráfica:



Una aplicación interesante de las inecuaciones es hallar el dominio de una expresión algebraica irracional.

Ejemplo

Hallar el dominio de las expresiones siguientes, teniendo en cuenta que estas expresiones toman valores reales:

a) $\sqrt{x + 5}$ b) $\sqrt{7 - 2x}$ c) $\sqrt{64 - 4x^2}$

Resolución:

a) La expresión $\sqrt{x + 5}$ está definida en $\Re$ para las x tales que $x + 5 \geq 0$, o sea, $x \geq -5$, luego el dominio de la expresión es $[-5, \infty)$.

b) La expresión $\sqrt{7-2x}$ está definida en $\Re$ para las x tales que $7-2x \geq 0$, o sea, $-2x \geq -7$, $2x \leq 7$, $x \leq 7/2 = 3.5$, luego el dominio de la expresión es $(-\infty, 3.5]$

c) La expresión $\sqrt{64-4x^2}$ está definida en $\Re$ para las x tales que: $64-4x^2 \geq 0$

$64-4x^2 \geq 0$

$16-x^2 \geq 0$ Divide ambos miembros entre 4

$(4-x)(4+x) \geq 0$ Factoriza

Números críticos: $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$

Intervalos de prueba: $(-\infty, -4)$, $(-4, 4)$ y $(4, \infty)$

Una prueba demuestra que $64-4x^2 \geq 0$ para $-4 \leq x \leq 4$. Por lo tanto, el dominio de la expresión $64-4x^2$ es el intervalo $[-4, 4]$.

Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita

Un sistema de inecuaciones lineales con una incógnita es un conjunto formado por dos o más inecuaciones, cuyo conjunto solución del sistema es la intersección de los conjuntos soluciones de todas y cada una de las inecuaciones del sistema.

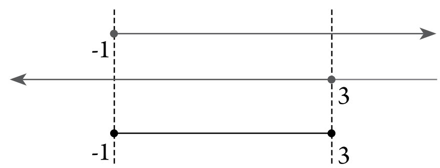
Por tanto, para resolver analíticamente un sistema de inecuaciones lineales con una incógnita primeramente se resuelve cada inecuación por separado, y después se determina la intersección de los conjuntos soluciones de éstas el que será el conjunto solución del sistema.

Ejemplo

Resolver el sistema $\begin{Bmatrix} 2x+3 \geq 1 \\ -x+2 \geq -1 \end{Bmatrix}$

Resolución:

$$\begin{Bmatrix} 2x+3 \geq 1 & \Rightarrow & 2x \geq 1-3 & \Rightarrow & x \geq \frac{1-3}{2} = -1 \\ -x+2 \geq -1 & \Rightarrow & 2+1 \geq x & \Rightarrow & 3 \geq x \Leftrightarrow x \leq 3 \end{Bmatrix}$$



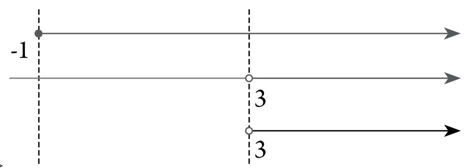
Por tanto el conjunto solución del sistema es el conjunto o intervalo: $[-1, 3]$.

Ejemplo

Resolver el sistema $\begin{Bmatrix} 2x+3 \geq 1 \\ -x+2 < -1 \end{Bmatrix}$

Resolución:

$$\begin{Bmatrix} 2x+3 \geq 1 & \Rightarrow & 2x \geq 1-3 & \Rightarrow & x \geq \frac{1-3}{2} = -1 \\ -x+2 < -1 & \Rightarrow & 2+1 < x & \Rightarrow & 3 < x \Leftrightarrow x > 3 \end{Bmatrix}$$



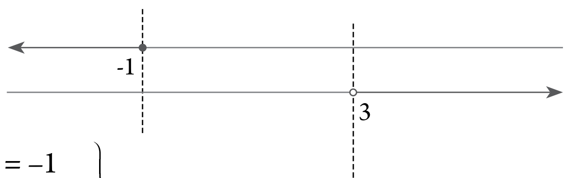
Por tanto el conjunto solución del sistema es el conjunto o intervalo: $(3, \infty)$.

Ejemplo

Resolver el sistema $\begin{Bmatrix} 2x+3 < 1 \\ -x+6 > 3 \end{Bmatrix}$

Resolución:

$$\begin{Bmatrix} 2x+3 < 1 & \Rightarrow & 2x < 1-3 & \Rightarrow & x < \frac{1-3}{2} = -1 \\ -x+6 < 3 & \Rightarrow & 6-3 < x & \Rightarrow & 3 < x \Leftrightarrow x > 3 \end{Bmatrix}$$



Por tanto el conjunto solución del sistema es el conjunto vacío, o no tiene solución.

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Resolver las siguientes inecuaciones:

1) $3x + 7 < 14$ 2) $4z - \geq 9z + 12$ 3) $6p + 3 \leq 2p + 15$

4) $3(1 - y) \geq 5y$ 5) $5 - (2 + y) > -9$ 6) $5(x - 4) + 6 \leq 5 - x$

7) $-2-1\frac{1+y}{3} < \frac{y}{4}$ 8) $0.5x + 0.1 \leq 2.1 - 0.1x$ 9) $\frac{3-m}{2} - \frac{17}{4} < \frac{m-3}{3} - \frac{2m+3}{4}$

10) $\frac{y+3}{4} - 2 > \frac{y-1}{3}$ 11) $-10 \leq 2 - z \leq -4$ 12) $\frac{7}{2} > \frac{1-4y}{5} \geq \frac{3}{2}$

13) $0 < 2 - \frac{3y}{4} \leq \frac{1}{2}$ 14) $-4 < 3x + 5 \leq 8$ 15) $1 \leq \frac{7-x}{2} \leq 3$

16) $-5 < x - 4 < 2 - x$ 17) $5x - 2 \leq 10x + 8 \leq 2x - 8$ 18) $6x + 7 \geq 2x + 5 > x + 2$

19) $|x + 3| > 5$ 20) $|2x - 4| \geq 3$ 21) $|3x - 8| > 12$

22) $|2x - 3| \leq 6$ 23) $|2x - 5| < 4$ 24) $\left|\frac{2x-5}{3}\right| < 2$

A2) Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones lineales:

1) $\begin{Bmatrix} 4x + 2 < 10 \\ -x + 1 > 5 \end{Bmatrix}$ 2) $\begin{Bmatrix} -x - 2 < 7 \\ -x + 1 > -8 \end{Bmatrix}$ 3) $\begin{Bmatrix} 4w + 2 \leq 10 \\ w + 3 \geq 5 \end{Bmatrix}$ 4) $\begin{Bmatrix} x - 2 < 0 \\ x + 1 > 4 \end{Bmatrix}$

Problemas de aplicación de las inecuaciones lineales

La solución de diversos problemas da origen al planteamiento de inecuaciones. Esto es, la modelación matemática para la solución de determinados tipos de problemas se realiza con la utilización de inecuaciones. Las inecuaciones tienen muchas aplicaciones en el campo de otras ciencias y en situaciones prácticas.

Por ejemplo, las mediciones (de longitud, masa y tiempo) son básicamente aproximaciones, que se obtienen dentro de un rango de valores en dependencia de los instrumentos de medición y del sujeto que los opera. Luego los resultados de las mediciones se expresan e interpretan a través de desigualdades.

En estos problemas suelen aparecer frases como: “al menos”, “a lo sumo”, “menos (más) que”, “no más (menos) de”, “valor (número) mínimo (máximo)”, “como máximo (mínimo)”, etcétera. Si se presentan algunas de estas frases, entonces el modelo matemático apropiado para el problema puede ser construido con el uso de inecuaciones.

Los ejemplos siguientes muestran la forma de elaborar tal modelo.

Ejemplo | Qué números satisfacen la condición “seis más el triple de un número es menor o igual a dicho número”?

Resolución:

Planteamiento de la desigualdad: $6 + 3x \leq x$

$$6 + 3x - 6 - x \leq x - 6 - x$$

$$2x \leq -6$$

$$x \leq -6/2 = -3$$

Comprobación: Evaluemos en $x = -4$ $\quad 6 + 3(-4) = -6 \leq -4$

$x = -3$ $\quad 6 + 3(-3) = -3 \leq -3$

$x = -2$ $\quad 6 + 3(-2) = 0 > -2$

Respuesta: Los números que satisfacen la condición son todos los reales del intervalo $(-\infty, -3]$.

Ejemplo | El perímetro de un rectángulo es menor o igual que 44 metros. Si su ancho es 2 metros menor que su largo, encontrar los máximos valores posibles del largo y del ancho.

Resolución: Largo del rectángulo: x

Ancho del rectángulo: $x - 2$

Perímetro del rectángulo: $2(x - 2) + 2x$

Planteamiento y resolución de la desigualdad: $2(x - 2) + 2x \leq 44$

$$2x - 4 + 2x \leq 44$$

$$4x \leq 48$$

$$x \leq 48/4$$

Si $x \leq 12$ entonces $x - 2 \leq 10$. De donde, el largo debe medir necesariamente menor o igual que 12 m y el ancho a lo sumo 10 m.

Comprobación: $2(10) + 2\,(12) = 20+24 = 44 \leq 44$

Respuesta: Valores máximos posibles: Largo 12 m y ancho 10 m.

Ejemplo | Un estudiante recibió calificaciones de 86, 75 y 80 puntos en tres pruebas. ¿Cuál deberá ser su calificación en una cuarta prueba para que su promedio en las cuatro pruebas sea como mínimo 82?

Resolución:

Número de puntos de la cuarta prueba: x

Promedio de las cuatro pruebas: $\dfrac{86 + 75 + 80 + x}{4}$

Planteamiento y resolución de la desigualdad:

$86 + 75 + 80 + x \geq 82(4)$

$241 + x \geq 328$

$x \geq 328 - 241 = 87$

Comprobación:

$$\frac{86 + 75 + 80 + 87}{4} = \frac{328}{4} = 82 \geq 82$$

Como dicha calificación no puede exceder de 100 puntos, entonces la calificación en la cuarta prueba para alcanzar el promedio fijado deberá ser desde 87 puntos hasta 100 puntos $(87 \leq x \leq 100)$.

Respuesta: La calificación de la cuarta prueba debe ser mayor o igual que 87 puntos.

Ejemplo

Un fabricante de lámparas realiza gastos mensuales por \$12,000.00 que incluyen salarios, costos de operación de la planta y renta de la sala de exhibición. Si se vende cada lámpara en \$85.00 y el material que se ha usado en su producción cuesta \$30.00 ¿Cuántas lámparas debe hacer y vender cada mes de manera que obtenga una ganancia mínima de \$4,500.00 por mes?

Resolución:

Diferencia entre precio de una lámpara y costo del material utilizado: \$55.00.

Cantidad de lámparas por mes: x

Diferencia entre precio-costo material del total de lámparas: $x(55)$

Planteamiento y resolución de la desigualdad:

$$55x \geq 12\,000 + 4500$$

12 000: gastos generales mensuales (no incluye insumos materiales)

4 500: ganancia mínima.

$$55x \geq 16\,500$$
$$x \geq \frac{16\,500}{55}$$
$$x \geq 300 \quad \text{¡Compruébelo!}$$

Respuesta: Debe fabricar y vender como mínimo 300 lámparas mensuales para obtener una ganancia mínima de \$4,500.00 por mes.

Ejemplo

Un auto puede rentarse en la Compañía A por \$180.00 a la semana, sin cargo extra por kilómetros recorridos. Un auto similar puede rentarse en la Compañía B por \$100.00 a la semana, más 20 centavos por kilómetro recorrido. ¿Cuántos kilómetros debe recorrer una persona para que la renta en la Compañía A sea menor que en la Compañía B?

Resolución:

Número de kilómetros recorridos en una semana: n

Costo semanal en la compañía A: \$180.00

Costo semanal en la compañía B: \$100.00 + 0.20 n (pesos)

Planteamiento y resolución de la desigualdad:

$$100 + 0.2\,n > 180$$
$$0.2\,n > 80$$
$$n > \frac{80}{0.2}$$
$$n > 400 \quad \text{¡Compruébelo!}$$

Respuesta: El carro de la Compañía A es más barato si la persona piensa viajar más de 400 kilómetros en una semana.

Nota: Si rento el auto para viajar a Mazatlán desde Culiacán, me resulta rentarlo a la Compañía A, puesto que la distancia entre ambas ciudades es 220 km, sólo el viaje redondo rebasa los 400 km, sin contar el desplazamiento dentro de Mazatlán.

Ejemplo

El presupuesto de María no le permite gastar más de 900 pesos para la compra de 3 vestidos y 2 blusas. Todos los vestidos tienen el mismo precio e igual ocurre con las blusas, y el precio de un vestido es el doble que el de una blusa. ¿Cuánto es lo máximo que puede pagar por cada vestido y cada blusa para mantenerse dentro del presupuesto?

Resolución:

Precio unitario vestido: x 　　Precio unitario blusa: $x/2$

Planteamiento y resolución de la inecuación:

$$3x + 2\,(x/2) \leq 900$$
$$3x + x \leq 900$$
$$4x \leq 900$$
$$x \leq 900/4 = 225$$

Entonces precio de una blusa: $x/2 \leq 225/2 = 112.50$

Comprobación: $3(225) + 2\,(112.50) = 675 + 225 = 900 \leq 900$

Respuesta: Lo máximo que puede pagar por cada vestido es $225.00 y por cada blusa $112.50.

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) ¿Qué números satisfacen la condición: "7 menos la quinta parte de un número es mayor o igual que dicho número"?

A2) ¿Qué números satisfacen la condición: "4 más la tercera parte de un número es menor o igual que el doble de dicho número"?

A3) Si la temperatura en el ártico en un período de 24 horas varía entre – 49 °F y 14 °F. ¿Cuánto varía en grados Celsius si °F = 9/5 °C + 32?

A4) En un experimento de Química, la solución de ácido clorhídrico debe mantenerse de tal forma que su temperatura no sea menor que 28 °C ni mayor de 37 °C. ¿Cuál será la variación de la temperatura en grados Fahrenheit? °C = 5/9 (°F – 32)

A5) De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza "F" (en libras) que se requiere para estirar un resorte "y" pulgadas más de su longitud natural está dada por F = (4.5) y. Si $8 \leq F \leq 16$, ¿cuál es la variación correspondiente de y?

A6) La ley de Boyle para cierto gas dice que pv=200, donde p denota la presión (libras/pulgadas2) y V denota el volumen (pulgadas3). Si $30 \leq V \leq 60$, ¿cuál es la variación correspondiente de p?

A7) Se mide el lado de un cuadrado y la lectura indica 10.4 pulgadas, con un posible error de 1/16 de pulgada. Determina el intervalo que contenga el área del cuadrado (entre qué valores mínimo y máximo) debido al error de medición.

Sugerencia: x longitud verdadera del lado del cuadrado

$$|\,x - 10.4\,| \leq 1/16$$

x^2 área del cuadrado

A8) Supongamos que compras una bolsa de naranjas a 0.95 pesos por libra. El peso marcado en la bolsa es de 4.65 libras. Si la báscula que pesó la bolsa es precisa dentro de ½ onza (1/32 de libra). ¿Cuánto se te pudo cobrar de menos, o de más?

A9) Una persona sabe que su peso normal, de acuerdo con su estatura, debe estar entre 60 kg y 65 kg. Ella calcula que si pesara 45 kg menos que el doble de su peso actual estaría entre los límites normales. ¿Entre qué límites está su peso?

A10) Un equipo de baloncesto ganó 16 juegos más de los que perdió, no hubo empates. Si el equipo jugó más de 38 juegos y menos de 60 juegos. ¿Cuántos juegos pudo haber perdido?

2.5 Sistema de ecuaciones lineales

En la unidad anterior estudiaste las funciones lineales $\boldsymbol{y = mx + n}$, que pueden reducirse a **ecuaciones lineales con dos variables** de la forma $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ donde x, y son variables y a, b, c números reales dados. Las ecuaciones lineales con dos variables, como ya conoces, representan **rectas del plano coordenado.**

Se llama **solución** de una ecuación lineal con dos variables, al par de valores para los cuales la ecuación se transforma en una igualdad. En general, toda ecuación lineal con dos variables admite infinitas soluciones, que son las coordenadas de los infinitos puntos de la recta que ella representa.

Llamamos **sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables (o dos incógnitas)** a dos ecuaciones de este tipo que pueden reducirse a la forma siguiente:

$$\left\{\begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} a_1x + b_1y = d_1 \\ a_2x + b_2y = d_2 \end{matrix}\right\} \qquad \text{Donde: } a_1 \neq 0 \text{ ó } b_1 \neq 0\,;\ a_2 \neq 0 \text{ ó } b_2 \neq 0$$

Son **ejemplos** de estos sistemas:

$$\begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ x - 5y - 5 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = 4x \\ x + y = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ x - 4y = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x = 4 - y \\ y = 5 \end{cases}$$

Las soluciones de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas son las **soluciones comunes** a las dos ecuaciones que lo forman.

Se llaman **ecuaciones lineales con tres incógnitas** a las ecuaciones que pueden reducirse a la forma $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$ donde x, y, z son incógnitas y a, b, c, d números reales dados. Se denomina **solución** de una ecuación de este tipo, a los tres valores respectivos de las incógnitas para los cuales la ecuación se transforma en una igualdad.

Llamamos **sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas** a tres ecuaciones de este tipo que pueden reducirse a la forma siguiente:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = e_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = e_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = e_3 \end{cases}$$

Donde: en cada una de las ecuaciones no todos los coeficientes de las variables son iguales a cero

Son ejemplos de estos sistemas:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + 3 = 0 \\ x + 3y + z - 4 = 0 \\ 2x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - 6y + 2z = -2 \\ x + 4y + 3z = 10 \\ 3x + 5y + 7z = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 11 \\ 3x + 5z = 17 \\ 2x + 5y - 4z = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3z = -3 \\ 2y - z = 12 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Las soluciones de los sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas son las **soluciones comunes** a las tres ecuaciones que lo forman.

En esta unidad resolveremos sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

Método gráfico de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables

El conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables puede determinarse gráficamente. Para esto debes recordar que: “Toda ecuación de la forma $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ con $x, y \in \Re$; a y b no simultáneamente nulos representa una recta en el plano coordenado”, o sea, toda ecuación de primer grado con dos variables representa una recta en el plano.

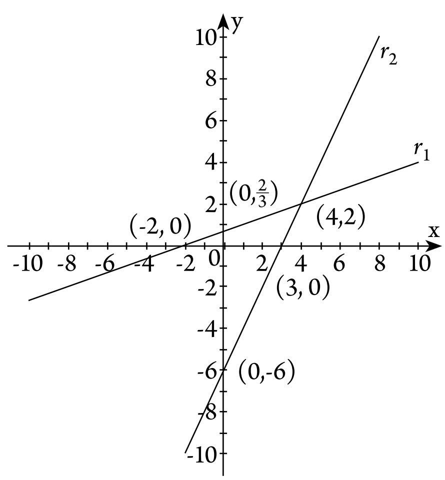
El **Método Gráfico** para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables, consiste en representar gráficamente las rectas cuyas ecuaciones forman el sistema y así podemos determinar las coordenadas de los puntos que son comunes (en caso que existan), las cuales forman el conjunto solución del sistema. Por lo general, las soluciones que se obtienen por este método son **aproximadas**.

Ejemplo

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método gráfico.

$$\begin{cases} x - 3y = -2 & (1) \\ 2x - y = 6 & (2) \end{cases}$$

Resolución: Para resolverlo se despeja la variable $\boldsymbol{y}$ en cada una de las ecuaciones y se encuentran dos puntos para trazar cada recta (bastan sólo dos puntos para determinar una recta), para esto se dan valores arbitrarios a $\boldsymbol{x}$ y a partir de ellos se obtienen los valores de $\boldsymbol{y}$. Como recordarás resulta cómodo hallar los puntos de intersección de cada una de las rectas con los ejes coordenados, esto ocurre cuando $x = 0$ y $y = 0$ en cada una de las ecuaciones del sistema.



Así, de $x - 3y = -2$; se tiene $y = (x + 2)/3$, de donde: para $x = 0$, $y = 2/3$; y para $y = 0$, $x = -2$; en consecuencia la recta r_1 pasa por los puntos $(0, 2/3)$ y $(-2, 0)$.

Así, también de $2x - y = 6$; se tiene $y = 2x - 6$, de donde: para $x = 0$, $y = -6$; y para $y = 0$, $x = 3$; por tanto la recta r_2 pasa por los puntos $(0, -6)$ y $(3, 0)$.

Finalmente trazamos ambas rectas en un sistema de coordenadas:

El punto P de intersección de las rectas r_1 y r_2, tiene por coordenadas $(4, 2)$. Comprobar que los valores $x = 4$, $y = 2$ satisfacen las ecuaciones (1) y (2) y que por tanto son la solución del sistema.

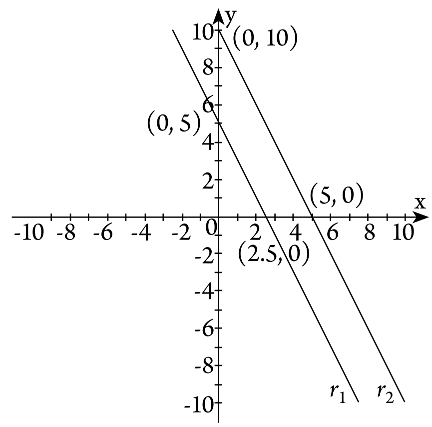
Ejemplo

Resuelve por el método gráfico el siguiente sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ 2x + y = 10 & (2) \end{cases}$$

Resolución: De la Ec. (1): para $x = 0$, $y = 5$; y para $y = 0$, $x = 5/2 = 2.5$; por tanto la recta r_1 pasa por los puntos $(0, 5)$ y $(2.5, 0)$.

Y de la Ec. (2): para $x = 0$, $y = 10$; y para $y = 0$, $x = 5$; por tanto la recta r_2 pasa por los puntos $(0, 10)$ y $(5,0)$. Trazamos ambas rectas en un sistema de coordenadas.



El sistema está representado por dos rectas paralelas, como las rectas no se cortan en ningún punto, el sistema no tiene solución. O sea, no existe ningún par de valores que satisfaga a ambas ecuaciones.

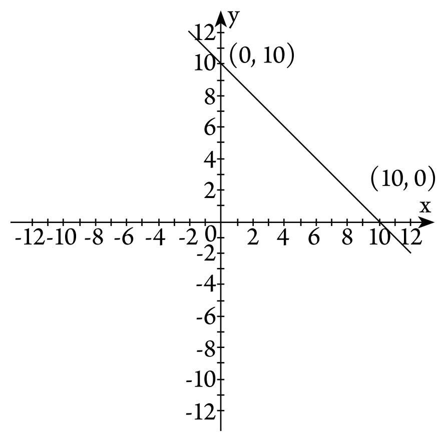
Ejemplo

Resuelve el siguiente sistema por el método gráfico:

$$\begin{cases} x + y = 10 & (1) \\ 3x + 3y = 30 & (2) \end{cases}$$

Resolución: De la Ec. (1) para $x = 0$, $y = 10$; y para $y = 0$, $x = 10$; por tanto la recta r_1 pasa por los puntos $(0, 10)$ y $(10, 0)$.

De la Ec. (2) para $x = 0$, $y = 10$; y para $y = 0$, $x = 10$; por tanto la recta r_2 pasa por los puntos $(0, 10)$ y $(10, 0)$.



Ambas rectas coinciden (las dos rectas se confunden en una sola), el sistema resulta representado por una sola recta. Esto se debe a que las dos ecuaciones son equivalentes: los miembros de la segunda ecuación son respectivamente el triple de los de la primera. Cualquier solución de la primera ecuación es también solución de la segunda, y en consecuencia del sistema.

Ya que las rectas se "cortan" en todos sus puntos, el sistema tiene infinidad de soluciones, si un sistema de ecuaciones lineales tiene dos soluciones diferentes, entonces tiene necesariamente un número infinito de soluciones.

Interpretación geométrica de la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Dado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (S_1)$

Si $b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$ podemos expresar el sistema (S_1), después de despejar la y en cada ecuación en la forma siguiente: $\begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1} \\ y = -\dfrac{a_2}{b_2}x - \dfrac{c_2}{b_2} \end{cases}$

Como ambas ecuaciones corresponden a rectas, podemos conocer las posiciones relativas entre ellas analizando sus pendientes $\boldsymbol{m_1 = -a_1/b_1}$ **y** $\boldsymbol{m_2 = -a_2/b_2}$.

1. Si $\boldsymbol{-a_1/b_1 \neq -a_2/b_2\ (m_1 \neq m_2)}$, entonces $r_1 \nparallel r_2$ y el sistema tiene solución única ya que las rectas se intersectan en un punto.
2. Si $\boldsymbol{-a_1/b_1 = -a_2/b_2\ (m_1 = m_2)}$ y $\boldsymbol{-c_1/b_1 \neq -c_2/b_2}$ entonces $r_1 \parallel r_2$ y el sistema no tiene solución.
3. Si $\boldsymbol{-a_1/b_1 = -a_2/b_2\ (m_1 = m_2)}$ y $\boldsymbol{-c_1/b_1 = -c_2/b_2}$ entonces r_1 y r_2 coinciden y el sistema tiene infinitas soluciones.

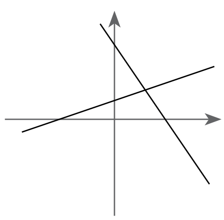
Observa que en el primer caso los coeficientes de las variables de las ecuaciones no son proporcionales y en los otros dos casos sí lo son (en el caso de infinitas soluciones todos sus coeficientes son proporcionales, incluyendo los términos independientes).

En suma: para un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, el número de soluciones está dado por tres posibilidades:

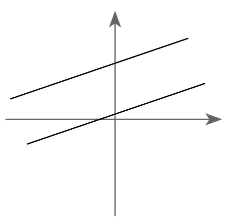
Número de soluciones		**Interpretación geométrica**
1. Exactamente una solución	⇔	Las dos rectas se intersectan en un punto
2. No tiene solución	⇔	Las dos rectas son paralelas.
3. Infinidad de soluciones	⇔	Las dos rectas son idénticas (coinciden)

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **consistente** si tiene al menos una solución (casos 1 y 3) y es **inconsistente** (o incompatible) si no tiene solución (caso 2).

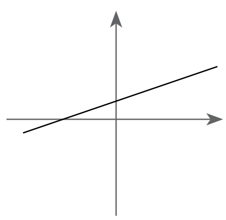
Si el sistema de ecuaciones tiene una sola solución se llama **determinado** (caso 1), se dice que las ecuaciones son independientes, y si tiene infinidad de soluciones se dice **indeterminado** (caso 3), las ecuaciones se denominan dependientes.



Sistema consistente e independiente (una sola solución).



Sistema inconsistente; líneas paralelas (ninguna solución).



Sistema dependiente; las líneas coinciden (número infinito de soluciones).

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Determina cuáles de los siguientes pares numéricos son soluciones del sistema

a) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ $(0,1);\ (2,2);\ (-2,-2)$

b) $\begin{cases} 3x+2y+26=0 \\ y=5x \end{cases}$ $(0,0);\ (2,5);\ (-2,-10)$

c) $\begin{cases} 5y+x=0 \\ 12x-3y=5 \end{cases}$ $(5/63, 25/63);\ (25/63, -5/63);\ (-1,0)$

A2) En cada inciso agrega una ecuación de modo que se obtenga un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables que tenga exactamente una solución (inciso a), ninguna solución (inciso b) e infinitas soluciones (inciso c).

a) $y=x+2$ b) $x+5y=15$ c) $2x-3y=-1$

A3) Resuelve gráficamente los sistemas de ecuaciones siguientes.

a) $\begin{cases} x+2y=8 \\ 2x+4y=16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y=2x-8 \\ x-y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+x=8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=10-y \\ x=2+y \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-2y=3-y \\ x+y=9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 4x+6y=36 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2.5x+y=5 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 4x-5y=0 \\ x+y=18 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3x-4y=6 \\ x-y=1 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 2x+4y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases}$

A4) Determina el valor de a para que los sistemas siguientes tengan una o ninguna solución:

a) $\begin{cases} x+ay=0 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax-6y=19 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$

Métodos algebraicos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

El método gráfico para la solución de sistemas de ecuaciones tiene alcance limitado: en caso de no ser "soluciones exactas" (lo que es perfectamente legítimo e inclusive más cercano a la realidad), el método gráfico no permite calcular exactamente la raíz. Además, si me interesa estudiar un tipo especial de solución, por ejemplo: racional, entonces la "recta completa" no me sirve para representar la situación, sólo me interesarían los puntos con coordenadas "racionales".

Este método también tiene sus ventajas, si sólo me interesa conocer los signos de los valores de la solución, sería el mejor método, pues obtendría la respuesta sin necesidad de trabajo algebraico.

Los comentarios anteriores brindan una justificación para que a continuación estudiemos diferentes métodos analíticos (o algebraicos) para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, ya que mediante estos podemos encontrar con mayor precisión las soluciones reales (particularmente las no enteras) de dichos sistemas.

La esencia de estos métodos radica en la obtención de una ecuación con una sola variable a partir de las dos ecuaciones con dos variables que forman el sistema. Al resolver esta ecuación hallamos el valor numérico de una de las variables. El valor de la otra variable lo obtenemos sustituyendo el valor numérico hallado en una de las dos ecuaciones del sistema.

A continuación ilustraremos estos métodos por separados, sin embargo, es importante que en la práctica se sepa apelar a cualquier método o combinarlos para resolver un problema.

Método de igualación

Ejemplo

Resuelve por el método de igualación el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 23 & (1) \\ 5x - 2y = 10 & (2) \end{cases}$$

Resolución: Primero se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones. En este caso despejemos x en (1) y (2).

De (1): $2x = 23 - 3y \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{23 - 3y}{2} \qquad (3)$

De (2): $5x - 2y = 10 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{10 + 2y}{5} \qquad (4)$

Segundo: Se igualan las dos ecuaciones despejadas, con lo que se obtiene una ecuación con una incógnita. Igualando (3) y (4).

$$\frac{23 - 3y}{2} = \frac{10 + 2y}{5}$$

Tercero: Se resuelve la ecuación de primer grado que resulta.

$$5(23 - 3y) = 2\,(10 + 2y)$$
$$115 - 15y = 20 + 4y$$
$$-15y - 4y = 20 - 115$$
$$-19y = -95$$
$$\therefore\ y = \frac{-95}{-19} = 5$$

Cuarto: Se sustituye el valor encontrado en cualquiera de las ecuaciones despejadas. Sustituyendo $y = 5$ en la ecuación (3):

$$x = \frac{23 - 3(5)}{2} = \frac{23 - 15}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Quinto: se comprueban los valores hallados de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ en las ecuaciones originales del sistema.

En la ecuación (1):	En la ecuación (2):
$2(4) + 3\,(5) = 23$	$5(4) - 2\,(5) = 10$
$8 + 15 = 23$	$20 - 10 = 10$
$23 = 23$	$10 = 10$

Ahora podemos afirmar que $x = 4$, $y = 5$ es la solución del sistema, o sea, que el **par numérico ordenado** $(4, 5)$ es la solución del sistema.

Método de sustitución

Ejemplo

Resuelve por el método de sustitución el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 & (1) \\ 3x + y = 20 & (2) \end{cases}$$

Resolución: Primero despejamos una variable en una de las dos ecuaciones. En este caso resulta más fácil despejar ***y*** en la segunda ecuación:

$$y = 20 - 3x \qquad (3)$$

Segundo: sustituimos el valor de ***y*** en la primera ecuación (la otra ecuación), y así obtenemos una ecuación que tiene a x como única variable:

$$2x - 3(20 - 3x) = 6$$

Tercero: resolvemos la ecuación anterior y así obtenemos el valor de la variable ***x***:

$$2x - 60 + 9x = 6 \quad \Rightarrow \quad 11x = 66 \quad \Rightarrow \quad x = 66/11 = 6$$

Cuarto: sustituimos el valor $\boldsymbol{x} = 6$ en la ecuación (3) para calcular el valor de ***y***.

$$y = 20 - 3(6) = 20 - 18 = 2$$

Quinto: se hace la comprobación (¡siempre en las ecuaciones originales!).

En la ecuación (1):	En la ecuación (2):
$2(6) - 3(2) = 6$	$3(6) + 2 = 20$
$12 - 6 = 6$	$18 + 2 = 20$
$6 = 6$	$20 = 20$

Por tanto, la solución del sistema es el par ordenado $(6, 2)$, o sea : $x = 6$; $y = 2$.

Método de suma y/o resta (o método de reducción)

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables aplicando este método debemos tener presente que si sumamos, restamos, multiplicamos o dividimos miembro a miembro dos igualdades obtenemos de nuevo una igualdad. Esto es:

Si $a = b$ y $c = d$; $(a, b, c, d \in \Re)$, entonces:
$a + c = b + d$; $\quad a - c = b - d$; $\quad a \cdot c = b \cdot d$; $\quad a/c = b/d \quad (c \neq 0, d \neq 0)$

La clave de este método consiste en obtener para una de las variables coeficientes iguales o que difieran sólo en el signo, de modo que al restar o sumar las dos ecuaciones esa variable quede eliminada y la ecuación resultante sea una ecuación lineal con una incógnita, que se procederá a resolver. Para obtener coeficientes, para una de las variables, iguales o que difieran sólo en el signo, es necesario multiplicar una o ambas ecuaciones respectivamente por constantes escogidas adecuadamente.

Ejemplo

Resuelve por el método de adición y sustracción el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x + 4y = -2 & (1) \\ 3x + 5y = 4 & (2) \end{cases}$$

Resolución: Primero: transformamos convenientemente las ecuaciones (1) y (2) de manera que obtengamos dos ecuaciones donde los coeficientes de una de las variables tengan valores absolutos iguales y signos opuestos. Multiplicando la ecuación (1) por 3 y la ecuación (2) por –2 obtenemos:

$$\begin{cases} 6x + 12y = -6 & (3) \\ -6x - 10y = -8 & (4) \end{cases}$$

Segundo: si sumamos miembro a miembro las ecuaciones (3) y (4), obtenemos la ecuación (5) que tiene una sola incógnita:

$$2y = -14 \qquad (5)$$

Tercero: hallamos la solución de la ecuación (5):

$$2y = -14 \quad \Rightarrow \quad y = -14/2 = -7$$

Cuarto: se sustituye el valor obtenido de ***y*** en cualquiera de las dos ecuaciones originales y se despeja la otra variable. Así, hallamos el valor de ***x*** sustituyendo el valor de ***y*** en la ecuación (1):

$$2x + 4(-7) = -2$$
$$2x - 28 = -2$$
$$2x = 26$$
$$x = 26/2 = 13$$

Quinto: se hace la comprobación en ambas ecuaciones originales.

En la ecuación (1) :

$$2(13) + 4(-7) = -2$$
$$26 - 28 = -2$$
$$-2 = -2$$

En la ecuación (2):

$$3(13) + 5(-7) = 4$$
$$39 - 35 = 4$$
$$4 = 4$$

Por tanto, la solución del sistema es el par ordenado (13, –7), o sea, $x = 13$, $y = -7$.

Pregunta: si el sistema anterior los resuelves por cualquiera de los otros métodos, ¿qué solución encontrarías?

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Resuelve por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y = -3 \\ -2x + 3y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 3x - 17 \\ y = 2x - 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5s + 10t = 30 \\ 2s - 2t = 6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 6s + 5t = 22 \\ 2s + 7t = 14 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 15(x + 2) - 20y = 50 \\ 20(x - 3) - 40(y - x) = 20 \end{cases}$

A2) Resuelve por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} x = 6 - 3y \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 8 + 5y \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \dfrac{8 - 3x}{4} \\ 8x - 4y = 14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -32 = 9x + 18y \\ 6x - 9y = -5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{5}y = 2 \\ \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}y = 0.25 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5\,(x - 3) - 24y = 5(x - \frac{3}{5}) \\ 5x + 7 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x - y = -3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

A3) Resuelve por el método de suma y/o resta:

a) $\begin{cases} 5x + y = 9 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -x - 6y = 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x - 5y = -9 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - 4y = 41 \\ 11x + 6y = 47 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x - \dfrac{1}{3}y = -9 \\ y - \dfrac{3}{4}x = 3 \end{cases}$ g) $\begin{cases} y = 0.2\,(8 - x) \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 5\,(x + 2) - 3\,(y + 1) = 23 \\ 3\,(x - 2) + 5\,(y - 1) = 19 \end{cases}$

A4) Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales siguientes (donde $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son las variables a calcular) utilizando el método que consideres más adecuado:

a) $\begin{cases} 3(x + 2) = 2y \\ 3(y + 5) = 7x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 1 = 2\,(y + 6) \\ x - 6 = 3\,(1 - 2y) \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{6} = \dfrac{x - y}{12} \\ \dfrac{2x}{3} = y + 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = 4x - 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + 4y = 253 \\ y = 5x \end{cases}$ f) $\begin{cases} 18x - 7y = 2 \\ x = y + \dfrac{1}{42} \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x - y = 3a \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x + 5y = a + b \\ 5x - 2y = a - b \end{cases}$

Resolución de sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas (o sistemas lineales de 3 × 3)

Los procedimientos estudiados para la resolución de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, se generalizan a los sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Ilustremos esto con un ejemplo que resolveremos por los tres métodos.

Ejemplo

Resuelve el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -4 & (1) \\ 2x - y + z = 5 & (2) \\ 3x + 2y - 3z = -4 & (3) \end{cases}$$

a) Solución por reducción (o adición y/o sustracción).

Sumemos las ecuaciones (1) y (2)

$$\begin{array}{rll} & x + 2y - \cancel{z} = -4 & (1) \\ + & 2x - y + \cancel{z} = 5 & (2) \\ \hline & 3x + y = 1 & (A) \end{array}$$

Multipliquemos la ecuación (2) por 3 y sumémosla con la ecuación (3), pretendemos eliminar "z".

$$\begin{array}{rll} & 6x - 3y + \cancel{3z} = 15 & (2) \times 3 \\ + & 3x + 2y - \cancel{3z} = -4 & (3) \\ \hline & 9x - y = 11 & (B) \end{array}$$

Procedemos a resolver el sistema de 2×2 formado por (A) y (B):

$$\begin{cases} 3x + y = 1 & \text{(A)} \\ 9x - y = 11 & \text{(B)} \end{cases}$$

Si sumamos (A) y (B) eliminamos "y", y obtenemos $x = 1$, sustituyendo en (A) o (B) obtenemos $y = -2$.

Determinemos "z" sustituyendo $x = 1$ e $y = -2$ en cualquiera de las ecuaciones (1), (2) ó (3) del sistema original, así tenemos $z = 1$.

La solución del sistema es: $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$ ¡compruébelo en el original!

b) Solución por sustitución.

Despejemos "x" en la ecuación (1):

$$x = -2y + z - 4 \qquad \text{(P)}$$

Sustituyamos dicho valor en las ecuaciones (2) y (3):

$$2x - y + z = 5 \text{ —— } (2)$$
$$2(-2y + z - 4) - y + z = 5$$
$$-4y + 2z - 8 - y + z = 5$$
$$-5y + 3z = 13 \text{ —— } (C)$$
$$3x + 2y - 3z = -4 \text{ —— } (3)$$
$$3(-2y + z - 4) + 2y - 3z = -4$$
$$-6y + 3z - 12 + 2y - 3z = -4$$
$$-4y = 8$$
$$y = -2 \quad \text{——} \quad (D)$$

Procedemos a resolver el sistema 2×2 formado por (C) y (D), en este caso particular la ecuación (D) nos da directamente el valor de "y". Sustituimos $y = -2$ en (C) para calcular "z", obtenemos $z = 1$.

Calculemos "x" sustituyendo $y = -2$ y $z = 1$ en (P), así obtenemos $x = 1$.

La solución del sistema es: $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$.

c) Solución por igualación.

Despejemos "z" en las tres ecuaciones del sistema:

$$x + 2y - z = -4 \quad (1) \longrightarrow z = x + 2y + 4 \quad (P)$$

$$2x - y + z = 5 \quad (2) \longrightarrow z = -2x + y + 5 \quad (Q)$$

$$3x + 2y - 3z = -4 \quad (3) \longrightarrow z = \frac{3x + 2y + 4}{3} \quad (R)$$

Igualemos los despejes de z en (P) y (Q): $x + 2y + 4 = -2x + y + 5$

Efectuando y simplificando tenemos: $3x + y = 1$ (E)

Igualemos los despejes de z en (P) y (R): $x + 2y + 4 = \dfrac{3x + 2y + 4}{3}$

Efectuando y simplificando tenemos: $y = -2$ (F)

Procedemos a resolver el sistema de 2×2 formado por (E) y (F), en este caso particular la ecuación (F) nos da directamente el valor de "y". Sustituimos $y = -2$ en (E) para calcular "x", obtenemos $x = 1$.

Calculemos "z" sustituyendo $x = 1$ e $y = -2$ en cualquiera de las ecuaciones (P), (Q) o (R), así obtenemos $z = 1$.

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$.

Del ejemplo resuelto por los diferentes métodos podemos concluir que:

Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

- Se toman dos parejas de ecuaciones en las que se elimina la misma variable, para obtener dos nuevas ecuaciones con sólo dos variables.
- Se resuelve el sistema formado por estas dos ecuaciones (sistema de 2×2).
- Se sustituyen los valores encontrados en una de las ecuaciones originales y se halla el valor de la otra variable.

El principio es reducir la solución de un sistema de 3×3 a un sistema de 2×2, y una vez resuelto este último (nos ofrece el valor de dos de las incógnitas) obtener la tercera incógnita sustituyendo en alguna de las ecuaciones originales.

Los sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, al igual que los sistemas de 2×2, pueden tener una solución única, no tener solución o tener infinitas soluciones.

Para la solución de estos sistemas de 3×3 se puede aplicar cualquiera de los métodos estudiados, pero en la práctica el que más se utiliza es el de suma y/o resta.

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 5x - 6y + 2z = -2 \\ x + 4y + 3z = 10 \\ 3x + 5y + 7z = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ -3x + 2y + 2z = 14 \\ 4x - 4y + 3z = 22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ x - 3y - 2z = -2 \\ 4x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y - z = 1 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ x - y + 2z = 7 \end{cases}$ e) $\begin{cases} -2x + 3y + 4z = 1 \\ x + 4y - 5z = 2 \\ -2x + 3y - z = -4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 25 \\ 2x - 4y + 2z = 14 \\ x - y - z = -4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - 6y = 13 + 3z \\ 3x + 2z = 4 - 2y \\ 4y - 6z = -16 + x \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x - 4y = -6z + 145 \\ 3y - 2x = -5z + 35 \\ 3z - x = -8y - 40 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x - y = 11 \\ 3x + 5z = 17 \\ 2x + 5y + 4z = -3 \end{cases}$

Determinantes y resolución de sistemas de ecuaciones lineales

A continuación estudiaremos algunos elementos de "determinantes" y el método de Cramer (por determinantes) para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de 2 × 2 y 3 × 3. Las siguientes expresiones simbólicas, cuyos elementos a y b son números reales, representan respectivamente un determinante de orden dos y un determinante de orden tres:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{cccl} & & & \\ \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right. & & & \begin{matrix} \leftarrow \text{Fila 1} \\ \leftarrow \text{Fila 2} \\ \leftarrow \text{Fila 3} \end{matrix} \end{array}$$

$$\text{columna 1} \quad \text{columna 2} \quad \text{columna 3}$$

A cada determinante le corresponde un número, el que se calcula efectuando operaciones entre sus elementos.

El determinante de segundo orden se resuelve como sigue: Se multiplican los dos elementos da cada diagonal, tal que el producto correspondiente a la diagonal que apunta hacia abajo conserva su signo, mientras que el correspondiente a la diagonal dirigida hacia arriba cambia de signo, y por último se suman los dos productos obtenidos:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Ejemplo

Calcular el determinante que sigue: $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}$

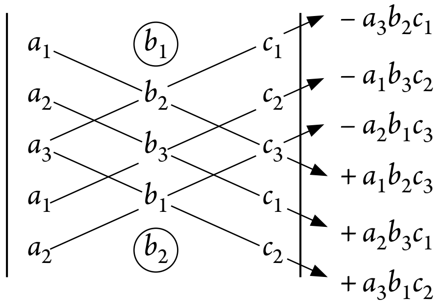
$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = (2)(-1) - (-4)(-5) = -2 - 20 = -22$$

El determinante de tercer orden se resuelve aplicando el método de Sarrus-fila:

Primero: bajo las columnas del determinante se repiten las dos primeras filas.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Segundo: se trazan tres diagonales dirigidas hacia abajo y tres hacia arriba, y después se multiplican los elementos de cada diagonal, observando que los productos asociados a las diagonales dirigidas hacia abajo conservan su signo, y los que corresponden a las diagonales dirigidas hacia arriba cambian su signo.



Nota: obsérvese también que los elementos enmarcados en un círculo no aparecen en los productos porque ya fueron considerados.

Tercero: se suman los productos obtenidos.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Ejemplo | Calcular el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

Resolución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = (1)(-1)(-2) + (3)(2)(-4) + (4)(0)(6) - (4)(-1)(-4) - (1)(2)(6) - (3)(0)(-2)$$

$$= 2 - 24 + 0 - 16 - 12 - 0 = -50$$

Los determinantes se pueden aplicar en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, y de hecho fue aquí donde se originaron. A continuación se describe la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante la **Regla de Cramer**.

Ejemplo | Resolver el sistema: $\begin{cases} 3x + 2y - 7 = 0 \\ y - 5x + 3 = 0 \end{cases}$

Descripción del método: Primero; se dispone cada ecuación de tal manera que ambas estén ordenadas en la misma forma con respecto a sus incógnitas, con los términos independientes en el segundo miembro.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -5x + y = -3 \end{cases}$$

Segundo; con los coeficientes ordenados de las incógnitas se forma y calcula el determinante del sistema llamado Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3\,(1) - (-5)(2) = 3 + 10 = 13$$

Tercero: para formar el determinante de "x", llamado Δ_x, se emplea la misma disposición que se utilizó para Δ, pero en la columna correspondiente a los coeficientes de la "x" se colocan los términos independientes:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (7)\,(1) - (-3)(2) = 7 + 6 = 13$$

Cuarto: el valor de x está dado por el siguiente cociente. $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{13}{13} = 1$

Quinto: análogamente se construye el determinante de la incógnita "y", llamado Δ_y, para ello, la columna correspondiente a los coeficientes de "y" en el determinante del sistema es sustituida por los términos independientes:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = (3)\,(-3) - (-5)(7) = -9 + 35 = 26$$

Sexto: el valor de y está dado por el siguiente cociente. $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{26}{13} = 2$

Séptimo: se hace la comprobación. De donde se confirma que la solución del sistema es: $x = 1$; $y = 2$.

Observa que: en caso de que $\Delta = 0$, entonces este método (Regla de Cramer) no se puede aplicar.

Enseguida se ilustra la solución de un sistema de ecuaciones de 3×3.

Ejemplo | Resolver el sistema: $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y + z = 4 \\ x - y + 2z = 6 \end{cases}$

Resolución: En este sistema ya están ordenadas las ecuaciones con respecto a sus incógnitas, se procede entonces a formar el determinante del sistema.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 + 2 - (-1) - (-1) - 12 = 9 - 12 = -3$$

El determinante de la incógnita x es:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6+4+12-(-6)-3-16=-3$$

El valor de x se obtiene dividiendo Δ_x entre Δ: $\quad x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{-3}{-3}=1$

El determinante de la incógnita y es:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 8-18-3+4-6+18=12-9=3$$

Por tanto: $\quad y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}=\dfrac{3}{-3}=-1$

De la misma manera se obtiene el determinante de z:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6+9+8+3+4-36=30-36=-6$$

Finalmente, el valor de z se determina con el cociente: $\quad z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=\dfrac{-6}{-3}=2$

Por tanto, una vez hecha la comprobación, se confirma que la solución del sistema es: $x=1$; $z=2$; y $y=-1$

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por la Regla de Cramer.

a) $\begin{cases} -5x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5(x+y)-\dfrac{y+2}{5}=4 \\ \dfrac{x+23}{3}-y+2x=0 \end{cases}$

c) $\begin{matrix} 7x+3y=15 \\ 2x+y=8 \end{matrix}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 - 2z \\ 5x - 2y = 15 - z \\ -3x + 2y = -13 - 5z \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - 3z = 1 \\ 3x - y + 4z = 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5x - 2y + 3z = -4 \\ 3x + 3y + 8z = -11 \\ 2x - y - 4z = -11 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x + 3y + 2z = 2 \\ 2x + 4y - 3z = -1 \\ -2x + y - 5z = -1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 5 \\ 6x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 4y + 8z = 5 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x + y = -4 \\ x + z - 1 = 0 \\ -3x + 2y = -13 - 5z \end{cases}$

Problemas de aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales tienen muchas aplicaciones en el campo de otras ciencias y en situaciones prácticas. La pregunta que puede surgir es: ¿cómo puedo saber qué problemas de aplicación pueden resolverse usando un sistema de ecuaciones lineales? La respuesta se deriva de las siguientes consideraciones:

- ¿El problema implica más de una cantidad desconocida?
- ¿Hay dos (o más) ecuaciones o condiciones a satisfacer?

Si se presentan una o ambas de estas condiciones, entonces el modelo matemático apropiado para el problema puede ser un sistema de ecuaciones lineales. Los ejemplos siguientes muestran la forma de construir tal modelo.

Ejemplo

Un propietario recibió $138,000.00 por pago de renta de dos casas en un año, la renta mensual de una era $1,000.00 más que la otra. ¿Cuál fue la renta mensual de cada una si la más barata estuvo desalquilada 3 meses?

Resolución: Representando por

x: renta mensual más cara

y: renta mensual más barata

Tenemos que: $x - y = 1000$ (1)

Como la primera se rentó 12 meses y la segunda 9 meses, tenemos que: $12x + 9y = 138{,}000$ (2)

por tanto el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x - y = 1000 & (1) \\ 12x + 9y = 138{,}000 & (2) \end{cases}$$

Multipliquemos la ecuación (1) por 9 y sumémosla con la ecuación (2):

$$\begin{array}{rl} 9x - \cancel{9y} = 9000 & (1) \times 9 \\ + \quad 12x + \cancel{9y} = 138000 & (2) \\ \hline 21x = 147000 & \\ x = 7000 & \end{array}$$

Calculemos y sustituyendo $x = 7000$ en (1), obtenemos: $y = 6000$. ¡Compruébelo!

Respuesta: Las rentas mensuales fueron de $7,000.00 y $6,000.00 , respectivamente.

Ejemplo

Juan recibe beneficios de dos inversiones equivalentes a tasas de interés simple del 30% y 35% respectivamente, tiene 3 veces más dinero invertido al 35% que al 30%. Si su beneficio anual por las dos inversiones es de $40,500.00, ¿Cuánto tiene invertido en cada caso?

Resolución:

Denominemos por: x : dinero invertido al 30% anual.

y : dinero invertido al 35% anual.

Beneficio total anual de las dos inversiones:

$$0.30x + 0.35y = 40{,}500 \qquad (1)$$

Tiene 3 veces más dinero al 35% que al 30%

$$y = 3x \qquad (2)$$

$$\begin{cases} 0.30x + 0.35y = 40{,}500 & (1) \\ y = 3x & (2) \end{cases}$$

Sustituimos el valor de y de la ecuación (2) en (1):

$$\begin{aligned} 0.30x + 0.35(3x) &= 40{,}500 \\ 0.30x + 1.05x &= 40{,}500 \\ 1.35x &= 40{,}500 \\ x &= 30{,}000 \end{aligned}$$

Calculemos y sustituyendo $x = 30{,}000$ en (2), obtenemos $y = 90, 000$.

Comprobación (beneficio obtenido):

$$\begin{aligned} (0.30)\,(30{,}000) + (0.35)\,(90{,}000) &= 40{,}500 \\ 9{,}000 + 31{,}500 &= 40{,}500 \end{aligned}$$

Respuesta: El capital invertido es $90,000.00 al 35% anual y $30,000.00 al 30% anual.

Ejemplo

Un avión que vuela con viento de frente recorre las 1800 millas entre dos ciudades en 3 horas y 36 minutos; en el vuelo de regreso, recorre la misma distancia en 3 horas. Halla la velocidad del avión respecto al suelo y la velocidad del viento, suponiendo que ambas permanecen constantes.

Resolución:

Las dos cantidades desconocidas son las velocidades del viento y del avión. Si V_1 es la velocidad del avión y V_2 es la velocidad del viento, entonces:

$V_1 - V_2 =$ velocidad del avión contra el viento

$V_1 + V_2 =$ velocidad del avión con el viento

Utilizando la fórmula: distancia = velocidad × tiempo

Para estas dos velocidades, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 1800 = (V_1 - V_2)(3 + \frac{23}{60}) & (1) \\ 1800 = (V_1 + V_2)(3) & (2) \end{cases}$$

Simplificando ambas ecuaciones tenemos:

$$\begin{cases} 500 = V_1 - V_2 & (3) \\ 600 = V_1 + V_2 & (4) \end{cases}$$

Sumando (3) y (4) obtenemos $V_1 = 550$ millas por hora, calculamos V_2 sustituyendo el valor de V_1 en (3): $V_2 = 50$ millas por hora.

Comprobación: Con viento de frente: 1800/500 = 3.6 horas

Con viento de cola: 1800/600 = 3 horas

Respuesta: La velocidad del avión es 550 millas/hora y la del viento 50 millas/hora.

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

Resolver los siguientes problemas utilizando sistemas de ecuaciones:

A1) El costo total de 5 libros de texto y 4 plumas es de \$32.00; el costo de otros 6 libros de texto iguales y 3 plumas es de \$33.00. Hallar el costo de cada artículo.

A2) Un hacendado compró 4 pollos y 7 conejos por \$514.00, y una semana después a los mismos precios, compró 8 pollos y 9 conejos por \$768.00. Hallar el costo de un pollo y de un conejo.

A3) Hallar dos números tales que la suma de sus recíprocos sea 5 y que la diferencia de sus recíprocos sea 1.

A4) Dos números están en relación de 2 a 3. Si el menor se aumenta en 8 y el mayor en 7, la relación es de 3 a 4. Hallar dichos números.

A5) Una cuerda de 54 metros se corta en dos pedazos de tal manera que una parte es 20 metros más larga que la otra. ¿Qué longitud tiene cada pieza?

A6) Si Pedro le da a Juan \$3.00, ambos tienen igual suma, pero si Juan le da a Pedro \$3.00, éste tiene 4 veces lo que le queda a Juan. ¿Cuánto tiene cada uno?

A7) Una empacadora tiene 500 empleados, paga a las mujeres a razón de \$2.40 la hora y a los hombres a \$2.80 la hora. La nómina de un día de 8 horas de trabajo fue de \$10,560.00 . ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres había empleados?

A8) En una elección reciente, el candidato vencedor recibió 85 votos más que su oponente. ¿Cuántos votos recibió cada candidato, si se recogieron 911 votos en total?

A9) El primer día de clase, 6/7 de los estudiantes en un curso de álgebra eran hombres. Posteriormente, se inscribieron un hombre y una mujer y el grupo quedó formado por hombres en sus 5/6. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres tomaban el curso?

A10) Un joven tiene 7 años menos que el triple de la edad de su perro. La suma de sus edades es 47. Determine la edad de cada uno.

A11) Las dimensiones de un terreno rectangular están en razón de 5 : 7, si el perímetro es 500 metros. Determinar sus dimensiones.

A12) Un avión hizo un viaje de 1300 millas a favor del viento en 2 horas, y su regreso contra el viento lo hizo en 2 horas con 30 minutos. Si la velocidad del viento fue la misma en todo el viaje, encuéntrese la velocidad del viento y el promedio de velocidad del avión en aire calmado.

A13) Un hombre recibe beneficios de dos inversiones equivalentes a tasas de interés simple de 4½% y 6%, respectivamente. Tiene dos veces más invertido al 4½% que al 6%, si el beneficio anual de las dos inversiones es \$9000.00 .Calcular cuánto tiene invertido en cada caso.

A14) Dos llaves de agua abiertas al mismo tiempo pueden llenar una alberca en 4 horas. Ambas llaves permanecen abiertas dos horas; si en ese momento se cierra la primera, la segunda permanece tres horas más para llenar la alberca. ¿Cuánto tardará cada llave por separado en llenar la alberca?

A15) Para la presentación de cierta obra de teatro se vendieron 500 boletos; los de adultos y los de niños se vendieron en \$7.50 y \$4.00 respectivamente, y la recaudación total fue de \$3,312.50. ¿Cuántos boletos de cada clase se vendieron?

A16) Se obtienen 10 galones de una solución ácida al 30%, al mezclarse una solución al 20% con otra al 50% . ¿Cuánto debe usarse de cada una?

A17) La suma de las cifras básicas de un número de 3 lugares es 18. Si del número dado se resta el número con sus cifras invertidas, se obtiene 99. Si el número dado se divide por el número de dos cifras formado por sus decenas y unidades, el cociente es 9. ¿Cuál es el número?

A18) La suma de las edades de Fermín, Leopoldo y Jorge es de 75 años. La suma de las edades de Fermín y Leopoldo es 45 años y el duplo de la edad de Jorge excede en 15 años a la suma de las edades de Fermín y Leopoldo. ¿Qué edad tiene cada uno si Fermín es 5 años menor que Leopoldo?

A19) En un número de tres cifras, la suma de ellas es 14. La suma del triple de la cifra de las centenas con la cifra de las unidades es igual a la cifra de las decenas. Si al número se le suma 99, el nuevo número tiene las mismas cifras pero en orden inverso. ¿Cuál es el número?

A20) Un tanque se llena por tres llaves de agua A, B y C. Si se abren las tres llaves juntas se llena en 30 min., si se abren las llaves A y B se llena en 45 min. y si se abren las llaves B y C se llena en 50 min. ¿En cuánto tiempo se llenará el tanque por cada una de las llaves de forma separada?

2.6 Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Una inecuación lineal con dos incógnitas es una expresión del tipo $ax + by < c$. O también del tipo $ax + by > c$; $ax + by \leq c$ o $ax + by \geq c$. Así, $2x - 3y < -6$, $6y > 4$ o $x + 10y \leq 7$, son ejemplos de inecuaciones lineales, con las incógnitas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

Resolver una inecuación consiste, por tanto, en encontrar todos los pares de valores (x, y) que verifiquen la inecuación, es decir, los puntos del plano cuyas coordenadas verifiquen la desigualdad. Por ejemplo los puntos $(0 , 2)$ y $(2 , 5)$ son soluciones de la inecuación $8x - 10y < 2$, pero no lo son $(-1, -1)$ ni $(3, 0)$.

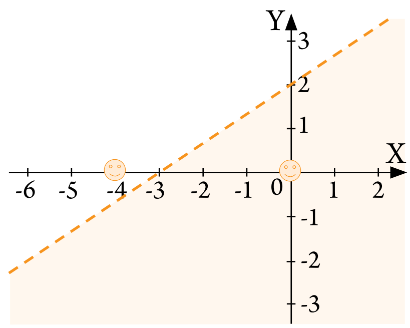
Antes de resolver los sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas es conveniente saber primeramente determinar, de forma gráfica, el conjunto solución de una inecuación lineal de dos variables.

Ejemplo | Resolver la inecuación: $2x - 3y + 6 > 0$.

Resolución: Primeramente se grafica la ecuación lineal $2x - 3y + 6 > 0$ que resulta de cambiar, en la inecuación, el símbolo de relación > por el de igualdad, para ello localizamos los puntos donde la recta corta a los ejes:

Para el eje Y: $(0, y)$	Para el eje X: $(x, 0)$
$\Rightarrow 2\,(0) -3y + 6 = 0$	$\Rightarrow 2x -3(0) + 6 = 0$
$\Rightarrow y = 2$	$\Rightarrow x = -3$
$\therefore$ El intercepto es $(0, 2)$	$\therefore$ El intercepto es $(-3, 0)$

Ya conocidos los interceptos $(0, 2)$ y $(-3, 0)$ con los ejes se grafica la recta tal como se muestra en la figura de la derecha. Como se observa el plano queda dividido en dos regiones o semiplanos uno de los cuales contiene al conjunto solución de la inecuación. Para determinarlo basta tomar un punto de prueba de los semiplanos y hacer los cálculos correspondientes en la desigualdad para ver si cumple con ella.



Por ejemplo, para el punto $(-4, 0)$ del semiplano superior se tiene que $2\,(-4) -3(0) + 6 = -2 > 0$ lo cual es falso, mientras que para $(0, 0)$ del semiplano inferior se tiene que: $2\,(0) -3(0) + 6 = 6 > 0$ lo cual es verdadero. Por tanto, el conjunto solución son las coordenadas de todos los puntos que se encuentran en el semiplano inferior.

Como ya vimos, el conjunto solución de una inecuación lineal de dos variables es un semiplano. Se infiere fácilmente que el conjunto solución de un sistema de inecuaciones es la intersección de todos los semiplanos de las soluciones particulares de cada una de las inecuaciones componentes del sistema. Hay que hacer notar que algunas veces el conjunto solución de un sistema de inecuaciones puede ser el conjunto vacío.

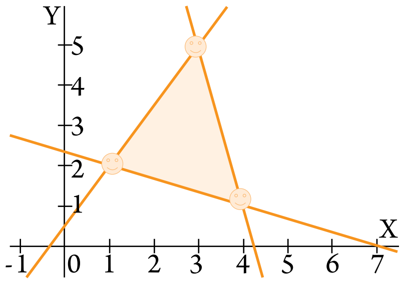
Para resolver un sistema de inecuaciones lineales de dos variables utilizaremos pues el método gráfico tal como se ejemplifica a continuación.

El conjunto solución, como podrás verificar, es el interior del triángulo sombreado, sin incluir ninguno de los lados. Para precisar mejor la región solución se pueden calcular los vértices del triángulo resolviendo los tres sistemas siguientes:

$$\begin{cases} x + 3y - 7 = 0 \\ 4x + y - 17 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 7 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 4x + y - 17 = 0 \end{cases}$$



Las soluciones de estos sistemas son respectivamente los puntos $(4, 1)$, $(1, 2)$ y $(3, 5)$.

Ejemplo La relación que debe existir entre dos especies de peces A y B para que se considere que las dos poblaciones están equilibradas es de, al menos, 5 de B por cada uno de A. Se estima que, por las condiciones de su habitad, el número de ejemplares de ambas especies no debe superar los 900 ejemplares. Determina el número de peces por especie que pueden coexistir sin peligro para su ecosistema.

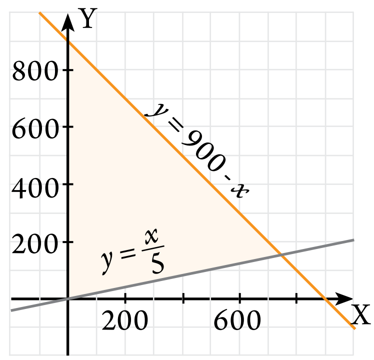
Resolución: Sea "x" el número de peces de la especie A y "y" el número de peces de la especie B, por tanto se tiene que:

$$x + y \leq 900$$
$$x \geq 5y$$

Para resolver este sistema convertimos las inecuaciones en ecuaciones luego determinamos dos puntos de ellas y finalmente las graficamos:

$$x + y \leq 900$$
$$\Rightarrow x + y = 900$$
$$\Rightarrow y = 900 - x$$

$$x \leq 5y$$
$$\Rightarrow x = 5y$$
$$\Rightarrow y = \frac{x}{5}$$



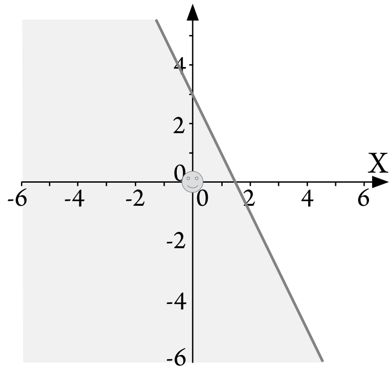
Verifica que cualquier punto del área sombreada es solución del sistema de inecuaciones.

Ejemplo

Resolver gráficamente el sistema de inecuaciones siguientes:

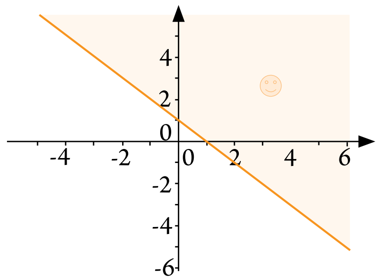
$$\begin{cases} 2x + y \le 3 \\ x + y \ge 1 \end{cases}$$

Resolución: Primeramente representamos la región solución de la primera inecuación. Para ello transformamos la desigualdad en igualdad: $2x + y = 3$. Posteriormente damos a una de las dos variables dos valores, con lo que obtenemos dos puntos de la recta que al representarlos, o localizarlos en el plano, y unirlos obtendremos la recta correspondiente.



Para $x = 1$	Para $x = 0$
$\Rightarrow 2(1) + y = 3$	$\Rightarrow 2(0) + y = 3$
$\Rightarrow y = 1$	$\Rightarrow y = 3$
$\Rightarrow (1, 1)$	$\Rightarrow (0, 3)$

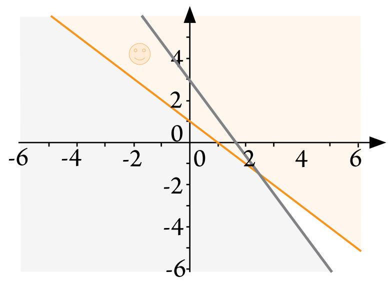
Tomamos un punto, por ejemplo el $(0, 0)$, los sustituimos en la desigualdad. Si se cumple, la solución es el semiplano donde se encuentra el punto, si no la solución será el otro semiplano. Como $2x + y \le 3 \;\Rightarrow\; 2(0) + 0 = 0 \le 3$, entonces el semiplano sombreado es la solución.



Ahora, de igual manera, determinamos y representamos el semiplano solución de la segunda inecuación: $x + y = 1$.

Para $x = 1$	Para $x = 0$
$\Rightarrow 1 + y = 1$	$\Rightarrow 0 + y = 1$
$\Rightarrow y = 0$	$\Rightarrow y = 1$
$\Rightarrow (1, 0)$	$\Rightarrow (0, 1)$

Para el punto $(4, 0)$, se tiene que: $x + y \ge 1 \Rightarrow 4 + 0 = 4 \ge 1$, por tanto $(4, 0)$ está en el semiplano solución. Finalmente encontramos que la solución es la intersección de las regiones soluciones tal como se observa en la figura de la derecha.



Ejemplo

Resolver gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 3y - 7 > 0 \\ 3x - 2y + 1 > 0 \\ 4x + y - 17 < 0 \end{cases}$$

Resolución: Lo primero que debemos hacer es trazar la gráfica de cada una de las ecuaciones. Para ello, como en el ejemplo anterior, basta con hallar las coordenadas de dos de los puntos para cada una de ellas para después localizarlos en el plano y graficar:

$$\begin{cases} \text{En: } x + 3y - 7 = 0, \text{ tenemos que: } (7, 0) \text{ y } (1, 2) \text{ pertenecen a la receta} \\ \text{En: } 3x - 2y + 1 = 0, \text{ tenemos que: } (1, 2) \text{ y } (0, 0.5) \text{ pertenecen a la receta} \\ \text{En: } 4x + y - 17 = 0, \text{ tenemos que: } (3, 5) \text{ y } (4, 1) \text{ pertenecen a la receta} \end{cases}$$

Actividades de aprendizaje de la unidad 2 para resolver en equipo

A1) ¿Cuál es el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

a) $2x - 3y + 6 < 0$

b) $2x - 3y + 6 \geq 0$

c) $2x - 3y + 6 \leq 0$

A2) Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 3x + 1 \leq = 16 \\ 2x + 3 > 7 \\ x - 1 > 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y \leq 2 \\ 2x + 3 > 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y \leq 0 \\ 3 + y - x > 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x + y \leq 24 \\ 2x + 3y \leq 24 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 3y \geq 5 \\ 3x - y \leq -9 \\ -x + 2y \leq 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 3x - y \geq -2 \\ 2x + 3y \geq 6 \end{cases}$

3 Potencias, radicales y logaritmos

Propósito de unidad

Comprende y realiza operaciones aritméticas y algebraicas con potencias de exponentes racionales, radicales y logaritmos, y las aplica en la formulación y resolución de problemas de su vida cotidiana, y de algunas áreas de las ingenierías y las ciencias.

Contenido

- **Potencias y Radicales:** Concepto y definición de potencia con exponente racional. Operaciones y leyes de los exponentes de las potencias. Concepto y definición de radical. Transformación de potencias con exponentes racionales en la forma de radicales y viceversa. Leyes de los radicales. Simplificación de radicales. Operaciones (suma, resta, multiplicación y división) con radicales. Cálculos y operaciones con expresiones algebraicas irracionales. Racionalización de fracciones.

- **Logaritmos:** Concepto y definición de logaritmo. Propiedades y leyes de los logaritmos. Cálculo de logaritmos (de bases 10 y e) con calculadora. Aplicaciones.

Indicadores de desempeño

En esta unidad debe lograrse que los alumnos sean capaces de:

1) Comprender el significado de la potenciación con exponente racional. Resolver, aplicando las leyes de los exponentes, ejercicios que involucren exponentes positivos, negativos, fraccionarios o cero.
2) Definir los radicales. Transformar expresiones algebraicas exponenciales, con exponente racional no entero, en forma de radical y viceversa. Comprender y aplicar las leyes de los radicales a la resolución de ejercicios algebraicos.
3) Realizar las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) con radicales y expresar el resultado (reducirlo) en la forma más simple posible. Además de, racionalizar el denominador de fracciones algebraicas que incluyen radicales.
4) Definir y comprender el concepto y las leyes de los logaritmos, enfatizando en los de base 10 y base e. Además de aplicarlos a los cálculos algebraicos, a la resolución de ecuaciones y a la formulación y resolución de problemas de las ciencias e ingenierías.

3 unidad

Actividad preliminar: ¿Qué son las potencias, los radicales y los logaritmos?

Ver los siguientes videos:
http://www.youtube.com/watch?v=lWv-eAvLc_c
http://www.youtube.com/watch?v=vTJoUxlKA0k
http://www.youtube.com/watch?v=qJCkueTMKlY

En el curso de Matemáticas I ya fueron estudiados, desde un enfoque aritmético, el tema de las potencias y radicales. En esta unidad, desde un enfoque más amplio como es el algebraico, se continúa y profundiza en el estudio de dicha temática. Además, se inicia el estudio elemental de los logaritmos enfatizando en sus aplicaciones a las ciencias y a la ingeniería.

3.1 Repaso de potencias de exponente entero

En la primera unidad de Matemáticas I estudiaste las potencias de base real y exponente entero cualquiera, ahora extenderemos la definición al caso en que la base sea una variable o una expresión algebraica.

En general, supongamos que "a" es una expresión algebraica o número real:

- Si $n \in \mathbb{N}$: $a^n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 ... a_n$, donde: $a = a_1 = a_2 = a_3 ... = a_n$ (en particular; $a^1 = a$)
- Si $n = 0$ $a \neq 0$, $a^0 = 1$
- Si $n \in \mathbb{N}$ (n *es entero positivo*) y $a \neq 0$: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Ejemplos

$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$ $\quad$ $(x^2+2x+1)^1 = x^2+2x+1$ $\quad$ $(x-4)^0 = 1$

$(2x+5)^{-2} = \dfrac{1}{(2x+5)^2}$ $\quad$ $(x+y)^3 = [(x+y)^{-3}]^{-1} = \dfrac{1}{(x+y)^{-3}}$

De las definiciones anteriores se derivan las siguientes **propiedades de los exponentes**.

Sean ***a*** y ***b*** expresiones algebraicas con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}$:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(ab)^m = a^m b^m$
3. $(a^m)^n = a^{mm}$
4. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$
5. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

Ejemplo

Según las propiedades 5 y 3:

$$\left(\frac{x^7}{x^{-3}}\right)^2 = \left(x^{7-(-3)}\right)^2 = \left(x^{10}\right)^2 = x^{20}$$

Desde luego, puede existir más de una forma de resolución de un ejercicio, siguiendo otros pasos siempre que estén justificados por las reglas del álgebra. Así, el ejemplo anterior se puede resolver de esta otra manera según las propiedades 6, 3 y 5:

$$\left(\frac{x^7}{x^{-3}}\right)^2 = \frac{(x^7)^2}{(x^{-3})^2} = \frac{x^{14}}{x^{-6}} = x^{14-(-6)} = x^{20}$$

Ejemplos

Donde se calcula y/o simplifica aplicando las propiedades de los exponentes (y las respuestas se expresan con exponentes positivos):

a) $(-2a^4b)(3a^{-3}b) = (-2)(3)(a^4)(a^{-3})(b)(b) = -6ab^2$

b) $\left(\frac{-3}{5}xy^2\right)^2 = \left(\frac{-3}{5}\right)^2 x^2(y^2)^2 = \frac{9x^2y^4}{25}$

c) $7a\,(-3a)^0 = 7a\,(1) = 7a$

d) $\left(\frac{3x^2}{y}\right)^3 (x^2+1)^0 = \frac{3^3(x^2)^3}{y^3}(1) = \frac{27x^6}{y^3}$

e) $6(a\cdot b)^2 \cdot \frac{a^2}{3b^2} = \frac{6a^2b^2\cdot a^2}{3b^2} = 2a^4$

f) $4^2(4^{-2}+2^2) = 4^2\cdot 4^{-2} + 4^2\cdot 2^2 = 4^0 + 8^2 = 1 + 64 = 65$

g) $\frac{1}{6^{-1}} - (3^2 \div 6^2) = 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 - \frac{1}{4} = \frac{23}{4}$

h) $b^2(1+b)^2 = [b(1+b)]^2 = (b+b^2)^2$

i) $\frac{(x^2+5x+6)^3}{(x+3)^3} = \left(\frac{x^2+5x+6}{x+3}\right)^3 = \left[\frac{(x+2)(x+3)}{(x+3)}\right]^3 = (x+2)^3$

j) $(a-b)^5(a+b)^5 = [(a-b)(a+b)]^5 = (a^2-b^2)^5$

k) $\frac{1}{2x^{-3}} = \frac{(1)(x^3)}{2} = \frac{x^3}{2} = 0.5x^3$

l) $\frac{12a^3b^{-4}}{4a^{-2}b} = \frac{12a^3\cdot a^2}{4b\cdot b^4} = \frac{3a^5}{b^5}$

m) $\left(\frac{5x^2}{y}\right)^{-2} = \frac{5^{-2}(x^2)^{-2}}{y^{-2}} = \frac{5^{-2}\,x^{-4}}{y^{-2}} = \frac{y^2}{5^2\,x^4} = \frac{y^2}{25x^4}$

Nota: cuando en la propiedad 4 la base es una fracción $a = \frac{b}{c}$, la propiedad adopta la forma:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{b}{c}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{b}{c}\right)^n} = \frac{1}{\frac{b^n}{c^n}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{b^n}{c^n}} = \frac{c^n}{b^n} = \left(\frac{c}{b}\right)^n$$

Aplicando esta nueva forma de la propiedad 4 al ejemplo anterior tendríamos que:

$$\left(\frac{5x^2}{y}\right)^{-2} = \left(\frac{y}{5x^2}\right)^2 = \frac{y^2}{25x^4}$$

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Calcula aplicando las propiedades de las potencias y simplifica tanto como sea posible:

a) $\left(\frac{4a^5}{6}\right)\left(\frac{3a^2}{6}\right) =$ b) $\left(\frac{6}{x^3}\right) \div 2y^{-3} =$ c) $(a^{-1}b^{-2}c^3)^4 =$

d) $(a^{n-1}b^{-n}c^{1/3})\,(a^n b^{2n} c) =$ e) $(r^{-4}s^{-3}t)^{-3} =$ f) $\frac{(a-b)^{-2}}{(a^2-b^2)^{-1}} =$

g) $\frac{y^3x^7 - y^2x^5}{y^3x^6} =$ h) $\frac{(x^2+6x+8)}{(x^2-4)^2} =$ i) $\frac{(x+3)^3}{(x^2+5x+6)^3} =$

j) $\frac{(a^2-9)^2}{a^2+6a+9} =$

A2) Verifica que las siguientes igualdades se cumplen.

a) $\frac{3^{x+2}(9^{2x})}{27} = 3^{5x-1}$ b) $\frac{x^{-3}(2x) - (x^2+1)(-3x)^{-4}}{x^{-6}} = 5x^4 + 3x^2$

c) $4^{x+2} - 4^x = 15 \times 4^x$ d) $4^n + 4^n = 2^{2n+1}$

3.2 Raíz enésima de una expresión algebraica y radicales

Como ya sabes, 7 y –7 son las raíces cuadradas de 49, porque $7^2 = 49$ y $(-7)^2 = 49$; y –2 es raíz cúbica única de –8 porque $(-2)^3 = -8$.

Cuando un número ***a*** tiene más de una raíz enésima (como es el caso de las raíces cuadradas de 49), se denomina **raíz enésima principal de *a*** a la raíz enésima que tiene el mismo signo que ***a***, y se le denota por $\sqrt[n]{a}$. En el caso de n par la raíz principal es la positiva y en caso de n impar la raíz principal es la única que existe. Así 7 es la raíz cuadrada principal de 49, $\sqrt{49} = 7$, y –2 es raíz cúbica principal de –8, $\sqrt[3]{-8} = -2$.

En resumen, se puede definir la **raíz de índice *n*** como la operación inversa de la **potenciación de exponente *n***. Estas ideas pueden ser generalizadas para las expresiones algebraicas, así tenemos en general que:

Raíz enésima de un número o de una expresión algebraica

Sea ***a*** un número real o una expresión algebraica y ***n*** natural, se llama raíz enésima de ***a*** ($\sqrt[n]{a}$) a todo número real ***x***, que satisface la ecuación $x^n = a$ (si la ecuación no tiene solución, ***a*** no tiene raíz enésima). O sea: $\sqrt[n]{a} = x \iff x^n = a$

En la expresión $\sqrt[n]{a}$, tenemos que:

✓ El símbolo $\sqrt{}$ es el signo de raíz y se llama **radical**. Normalmente se llama radical a cualquier raíz indicada de un número o de una expresión algebraica.

✓ El número o la expresión algebraica $\boldsymbol{a}$ se llama cantidad **subradical** o **radicando** y es el número o la expresión algebraica a la cual se le calcula la raíz enésima.

✓ El número natural n se llama **índice** del radical e indica el exponente al que hay que elevar la raíz para obtener la cantidad subradical. Cuando $n = 2$ no se escribe y se sobreentiende que se calcula la raíz cuadrada: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

En general se cumple que:

a) Si n es par, todo número real positivo tiene dos raíces enésimas, una positiva y otra negativa. Los números reales negativos no tienen raíz enésima cuando n es par.

b) Si n es impar, todo número real tiene una raíz enésima del mismo signo que a.

En consecuencia:

1. La raíz enésima de a para $\boldsymbol{a} \geq 0$ tiene sentido para cualquiera sea el índice $\boldsymbol{n}$ par o impar.
2. La raíz enésima de a para $\boldsymbol{a} < 0$ tiene sentido solo para cuando el índice $\boldsymbol{n}$ es impar.

De donde, si el radicando a es un número real positivo y el índice n es un número natural par entonces a tiene exactamente dos raíces reales de índice n: $\sqrt[n]{a}$ y $-\sqrt[n]{a}$. Dicho en otras palabras, la ecuación $x^n = a$, cuando a es positivo y n es par sólo admite como soluciones reales a $\sqrt[n]{a}$ y $-\sqrt[n]{a}$. En ocasiones, abusando de la escritura se escribe $x = \pm\sqrt[n]{a}$. Por ejemplo las soluciones reales de la ecuación $x^2 = 49$ son $x_1 = \sqrt{49} = 7$ y $x_2 = -\sqrt{49} = -7$.

Ejemplo | Determina todas las raíces de:

a) $\sqrt[4]{81}$, b) $\sqrt[5]{-32}$, c) $\sqrt[7]{\frac{1}{128}}$ y d) $\sqrt[6]{-5}$

Resolución:

a) $\sqrt[4]{81} = \pm 3$, porque: $3^4 = 81$ y $(-3)^4 = 81$

b) $\sqrt[5]{-32} = -2$, porque: $(-2)^5 = -32$

c) $\sqrt[7]{\frac{1}{128}} = \frac{1}{2}$, porque: $\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$

d) $\sqrt[6]{-5} =$ *no existe en* $\Re$, porque: para todo $x \in \Re$ se cumple que $x^6 \geq 0$.

Ejemplo | Determina la raíz indicada de:

a) $\sqrt[4]{81}$ b) $-\sqrt[4]{81}$ c) $-\sqrt[6]{4096}$ d) $\sqrt[n]{0}$ e) $\sqrt[8]{3^{16}}$ f) $\sqrt{-4}$

Resolución:

a) $\sqrt[4]{81} = 3$ porque $3^4 = 81$ y 3 y 81 son ambos positivos.

b) $-\sqrt[4]{81} = -3$ porque $3^4 = 81$.

c) $-\sqrt[6]{4096} = -4$ porque $4^6 = 4096$.

d) $\sqrt[n]{0} = 0$ porque cualquiera sea n natural $0^n = 0$.

e) $\sqrt{3^{16}} = \sqrt{3^4} = 3^2 = 9$ porque $(3^2)^8 = 3^{16}$ y 9 y 3^{16} son ambos positivos.

f) $\sqrt{-4}$ no tiene sentido porque -4 es negativo y la raíz es de índice 2 (par).

Dada la importancia de las expresiones $(\sqrt[n]{a})^n$ y $(\sqrt{a^n})$ analizamos continuación con más detalle su sentido y resultado.

Está claro que para cualquier número real $\boldsymbol{a}$ para el que la raíz enésima $\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}}$ tiene sentido (existe) se cumple la igualdad: $(\sqrt[n]{a})^n = a$, como ocurre con $(\sqrt{25})^2 = 25$. También, la igualdad anterior se cumple para todo $\boldsymbol{a}$ real si $\boldsymbol{n}$ es impar. Por ejemplo: $(\sqrt[3]{125})^3 = 125$ y $(\sqrt[3]{-125})^3 = -125$.

Sin embargo, la igualdad anterior no siempre tiene sentido en $\Re$. Este problema se presenta cuando $\boldsymbol{n}$ es par y $\boldsymbol{a}$ es un número real negativo, entonces la expresión $(\sqrt[n]{a})^n$ no significa nada, como ocurre en los ejemplos $\sqrt{-4}$ y $\sqrt[6]{-64}$, ya que estas no existen en $\Re$.

Ejemplos

Veamos ahora que ocurre con la expresión $\sqrt[n]{a^n}$:

$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ $\quad$ $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$ $\quad$ $\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$ $\quad$ $\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

De los ejemplos anteriores se observa que: si n es par, para cualquier número real a, se cumple que: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, en particular, $\sqrt{a^2} = |a|$. Y si n es impar, para cualquier número real a se cumple que: $\sqrt[n]{a^n} = a$. En resumen:

Para $a \in \Re$ y $n \in \mathbb{N}$ (par): $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$	Para $a \in \Re$ y $n \in \mathbb{N}$ (impar): $\sqrt[n]{a^n} = a$

De lo anterior queda claro que en general: $(\sqrt[n]{a})^n \neq \sqrt[n]{a^n}$, la igualdad no se cumple cuando n es par y $a < 0$, que es el caso en que la expresión de la izquierda no tiene sentido.

Ejemplos

a) $\sqrt[4]{16^4} = 16$ $\quad$ b) $(\sqrt[6]{-64})^6$ no existe, ya que $\sqrt[6]{-64} \notin \Re$ $\quad$ c) $\sqrt[6]{(-64)^6} = |-64| = 64$

d) $\sqrt[2]{(-10)^2} = |-10| = 10$ $\quad$ e) $\sqrt[6]{(3)^6} = |3| = 3$ $\quad$ f) $\sqrt[6]{125} = \sqrt{(5)^3} = 5$

g) $\sqrt[5]{-243} = \sqrt[5]{(-3)^5} = -3$

Actividades de aprendizaje

A1) Calcula el valor de la raíz:

a) $\sqrt[4]{16}$ $\quad$ b) $-\sqrt{121}$ $\quad$ c) $\sqrt[5]{-32}$ $\quad$ d) $\sqrt[12]{1}$ $\quad$ e) $\sqrt[3]{0.27}$ $\quad$ f) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$

A2) Calcula el valor de la expresión:

a) $5\sqrt{100} =$ $\quad$ b) $\sqrt[4]{625} - \sqrt[3]{-125} =$ $\quad$ c) $\dfrac{\frac{4}{8} + \sqrt[3]{8^{-1}}}{8^{-1}} =$ $\quad$ d) $\dfrac{5 + \sqrt{(5+0.5)^4}}{0.5} =$

A3) Determina cuál es el dominio de definición de las expresiones siguentes:

a) $\sqrt[4]{x}$ $\quad$ b) $\sqrt[3]{x}$ $\quad$ c) $\sqrt[6]{-x}$ $\quad$ d) $\sqrt[8]{x-2}$

Potencias de exponente racional fraccionario

Antes de desarrollar este tema recordemos primeramente que cualquier número racional puede ser expresado en forma de una fracción numérica irreducible cuyo denominador sea un entero positivo.

Es decir, si r es un número racional, $\boldsymbol{r}$ siempre puede ser expresado en la forma $\boldsymbol{r = p/q}$, con $\boldsymbol{p}$ entero, $\boldsymbol{q}$ entero positivo y tales que $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ no poseen divisores comunes, salvo el 1 y el –1.

Ejemplo $\dfrac{12}{48} = \dfrac{6}{24} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1(=p)}{4(=q)}$

Hasta este momento el trabajo con exponentes ha quedado restringido a exponentes enteros, pero se pueden utilizar los radicales para ampliar el concepto de potencia al caso de ***exponentes racionales fraccionarios***. Además, se quiere que se cumplan también las leyes de exponentes que se cumplen para las potencias de los números reales con exponentes enteros:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Así pues, si son válidas para la potenciación de exponente racional las mismas propiedades que para exponente entero, entonces:

$$4^{1/2} \times 4^{1/3} = 4^{1/2+1/3} = 4^{5/6} \qquad [(7.92)^{2/3}]^{1/5} = (7.92)^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}} = (7.92)^{\frac{2}{15}} \qquad 6^{2/7} \div 6^{1/4} = 6^{\frac{2}{7}-\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{28}}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4} \qquad \left((0.5)\left(\frac{6}{7}\right)\right)^3 = (0.5)^3\left(\frac{6}{7}\right)^3 \qquad 7^{-1/2} = \frac{1}{7^{1/2}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{1/2}$$

Con estas consideraciones previas, y con la intención de investigar sobre el significado de una potencia de exponente fraccionario, analizamos los siguientes casos donde la base de las potencias es un número real positivo o cero:

Si $\sqrt{5} = x$, entonces por definición: $x^2 = 5 = 5^1 = 5^{\frac{2}{2}} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2$. Por tanto $x = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

$\sqrt{9} = 3$, porque $3^2 = 9$. Pero: $3^2 = 9 = 9^1 = 9^{\frac{2}{2}} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^2$, de donde, $3 = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = \sqrt[2]{9^1}$

$\sqrt{8} = 2$, porque $2^3 = 8$. Pero: $2^3 = 8 = 8^1 = 8^{\frac{3}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3$, de donde, $2 = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8^1}$

$\sqrt{4^3} = 8$, porque $8^2 = 4^3 = 64$. Pero: $8^2 = 4^3 = (4^3)^1 = (4^3)^{\frac{2}{2}} = \left(4^{\frac{3}{2}}\right)^2 \Rightarrow 8 = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt[2]{4^3}$

De los casos anteriores se observa que:

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = \sqrt[2]{5^1} \qquad 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = \sqrt[2]{9^1} \qquad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8^1} \qquad 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt[2]{4^3}$$

Estos resultados particulares pueden ser generalizados en la siguiente definición:

Definición: $a^r = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

donde: a es un número real positivo, y $\boldsymbol{r = m/n}$ es la expresión irreducible de un número racional $\boldsymbol{r}$, con $\boldsymbol{m}$ entero y $\boldsymbol{n}$ natural.

Observaciones:

- En particular, si $m = 1$, se cumple que: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
- Si además, $m \geq 1$ y a = 0, se define: $0^r = \sqrt{0^m} = 0$
- Si $n = 1$, $a^r = a^{m/1} = a^m$, porque la raíz de índice 1 del radicando es el propio radicando, luego esta definición es compatible con la de potencia de exponente entero.
- La condición $m \geq 1$ en el caso $a = 0$ es para evitar la indefinición que se produce al dividir por cero.

Nota: Los exponentes racionales son particularmente útiles cuando se calculan raíces de números utilizando calculadora, para reducir el índice de un radical y para simplificar expresiones encontradas en cálculo.

Ejemplos

Calcula las siguientes potencias:

a) $3^{4/2} = 3^2 = 9$

b) $8^{4/6} = 8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

¡Nótese que para calcular la potencia se procede primero a reducir la fracción que aparece en el exponente!

c) $4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$

d) $25^{3/6} = 25^{1/2} = \sqrt{25} = 5$

e) $8^{-2/3} = 8^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{4}$

¡Nótese que si la fracción que aparece en el exponente es negativa, se transforma de modo que el numerador es negativo y el denominador positivo!

f) $2^{-1/2} = 2^{\frac{-1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$

g) $7^{8/12} = 7^{2/3} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49} \approx 3.66$

Propiedades de los radicales

Los radicales cumplen propiedades que son consecuencia inmediata de las propiedades de las potencias de exponente racional. Por ejemplo:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (a \times b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left((a)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = (a)^{\frac{1}{n} \times \frac{1}{m}} = (a)^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

A continuación vamos a resumir las propiedades más importantes de los radicales incluyendo algunas ya estudiadas con anterioridad.

Propiedades de los radicales

Supongamos que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números reales, variables o expresiones algebraicas, tales que las raíces indicadas existen (están bien definidas), y que $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ son naturales, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
5. $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$, k natural
6. $(\sqrt[n]{a})^n = a$
7. Para n par, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$; en particular, $\sqrt{a^2} = |a|$
8. Para n impar, $\sqrt[n]{a^n} = a$

Estas propiedades son de mucha aplicación en las operaciones con radicales, en la introducción y extracción de factores en el radical, en la racionalización de denominadores y en la simplificación de radicales.

En estas propiedades se considera que los números reales, variables o expresiones algebraicas $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son tales que las raíces indicadas existen, a tales efectos se suele exigir que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ sean positivos, lo que es una condición suficiente muy cómoda para trabajar. Sin embargo, la propiedad 6 en el caso n impar se cumple para cualquier valor real de a; y la propiedad 7 se cumple para cualquier valor real de a.

En el caso en que la base de la potencia sea un número real positivo, a partir de la definición anterior y de las propiedades ya estudiadas de los radicales, podemos inferir que, cualesquiera sean los números enteros m y n, con n positivo, se verifica la igualdad: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

En efecto, si $\frac{p}{q}$ (con $q \geq 1$) es la representación irreducible del número racional $\frac{m}{n}$, entonces $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, de donde se obtiene que $m \cdot q = p \cdot n$. De donde:

$$a^{m/n} = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q \cdot n]{a^{p \cdot n}} = \sqrt[q \cdot n]{a^{q \cdot m}} = \sqrt[n]{a^m}$$

En el caso en que $\boldsymbol{a}$ sea un número real negativo, solamente puede asumirse la definición anterior para la potencia $\boldsymbol{a^{m/n}}$ en el caso en que $\boldsymbol{n}$ sea un número natural impar. Así tenemos que:

Sea $\boldsymbol{a}$ un número real negativo, y sea $\boldsymbol{w = m/n}$ la expresión irreducible de un número racional $\boldsymbol{w}$, con $\boldsymbol{m}$ entero y $\boldsymbol{n}$ natural impar.

Entonces: $$a^w = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Observación: Hasta con la restricción introducida para la definición de las potencias de exponente racional y base negativa, resulta importante señalar que, en este caso, la igualdad $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ en general no se cumple. Por ejemplo, si la igualdad fuera cierta en lo general, sería $(-9)^{2/2} = \sqrt{(-9)^2}$, sin embargo ya conocemos que $-9 = (-9)^1 = (-9)^{2/2} \neq \sqrt{(-9)^2} = |-9| = 9$.

Ejemplos

Calcula las siguientes potencias:

a) $(-1)^{2/6} = (-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = -1$

b) $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

c) $(-8)^{2/6} = (-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

d) $(-8)^{3/9} = (-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

e) $(-3)^{3/4}$ no está definida (base negativa y denominador de la fracción irreducible par)

f) $(-5)^{2/4} = (-5)^{1/2}$ no está definida ($a = -5$, $n = 2$ par)

g) $(-1)^{1/2}$ no está definida ($a = -1$, $n = 2$ par)

Simplificación de radicales

En los cálculos con los radicales es conveniente trabajar con ellos **simplificados**.

Un radical está simplificado cuando:

- El índice no tiene factores comunes con el exponente del radicando.
- Se han extraído los factores que son raíces exactas.
- El radicando no tiene denominador.

Por ejemplo están simplificados los siguientes radicales:

$$\sqrt{a} \quad , \quad \sqrt[3]{a^2} \quad , \quad 2\sqrt[3]{x} \quad , \quad a^2b\sqrt[5]{a}$$

No están expresados en su forma más simple (simplificados) los siguientes radicales:

$$\sqrt[6]{a^4} \quad , \quad \sqrt[3]{a^5b} \quad , \quad \sqrt{\frac{x+y}{x^2}}$$

Para simplificar un radical es frecuente realizar las transformaciones siguientes:

Reducir el índice del radical | Extraer factores del radical

Simplificación por reducción del índice del radical

En el trabajo con los radicales podemos en muchas ocasiones simplificarlos sin que el resultado se altere y así trabajar con expresiones más simples, por ejemplo:

a) $\sqrt[12]{3^{24}} = 3^2$ porque $(3^2)^{12} = 3^{24}$; de igual forma $\sqrt[4]{3^8} = 3^2$ porque $(3^2)^4 = 3^8$; luego: $\sqrt[12]{3^{24}} = \sqrt[4]{3^8} = 3^2$.

b) $\sqrt[12]{2^{18}} = \sqrt{2^3}$ porque $\left(\sqrt{2^3}\right)^{12} = \left[\left(\sqrt{2^3}\right)^2\right]^6 = \left(2^3\right)^6 = 2^{18}$; de igual forma $\sqrt[6]{2^9} = \sqrt{2^3}$ porque $\left(\sqrt{2^3}\right)^6 = \left[\left(\sqrt{2^3}\right)^2\right]^3 = \left(2^3\right)^3 = 2^9$ y también $\sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3}$ porque $\left(\sqrt{2^3}\right)^4 = \left[\left(\sqrt{2^3}\right)^2\right]^2 = \left(2^3\right)^2 = 2^6$; luego:

$\sqrt[12]{2^{18}} = \sqrt[6]{2^9} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3}$.

Observa que en estos casos el índice del radical y el exponente del radicando tienen un divisor común (que es un número natural) por el cual se pueden dividir hasta que ambos números resulten primos entre sí sin alterar los resultados, de ahí que pueda seguirse este camino alternativo para simplificar estas expresiones. De hecho, lo que se tiene aquí sería una aplicación de la propiedad 5 de los radicales.

En general, para $\sqrt[n]{a^m}$ con $a > 0$; n, m enteros ; $n \geq 1$ se cumple que:

$$\boxed{\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}\text{, con } k \text{ natural}}$$

Ejemplos | a) Reduce el índice del radical siguiente: $\sqrt[6]{(a+b)^3}$, $(a+b) \geq 0$

Resolución: Se descomponen en factores el índice y el exponente y se cancelan los factores comunes: $\sqrt[6]{(a+b)^3} = \sqrt[3\times 2]{(a+b)^{3\times 1}} = \sqrt{(a+b)}$.

b) $\sqrt[8]{5^6} = \sqrt[4\cdot 2]{5^{3\cdot 2}} = \sqrt[4]{5^3}$

c) $\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[3\cdot 2]{5^3} = \sqrt{5}$

d) $\sqrt[9]{27x^6} = \sqrt[9]{(3x^2)^3} = \sqrt[3]{3x^2}$

e) $\sqrt[4]{256x^8y^{12}} = \sqrt[4]{(4x^2y^3)^4} = 4x^2y^3$

Simplificación por extracción de todos los factores posibles del radical

Ejemplo

a) $\sqrt[3]{a^3b^6c^2} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6} \cdot \sqrt[3]{c^2} = ab^2\sqrt[3]{c^2}$

b) $\sqrt[4]{a^5b^2} = \sqrt[4]{a^4 \cdot a \cdot b^2} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{ab^2} = a\sqrt[4]{ab^2}$

Observa que en la práctica se extraen del radical los factores cuyo exponente es mayor o igual que el índice. En estos casos se divide el exponente por el índice y el cociente es el exponente de la potencia que "sale", mientras que el resto es el exponente de la potencia que "queda" en el radical. O sea:

$$\sqrt[n]{a^{nk+r}} = \sqrt[n]{a^{nk} \cdot a^r} = \sqrt[n]{a^{nk}} \cdot \sqrt[n]{a^r} = a^k\sqrt[n]{a^r}$$

Ejemplos

Simplifica los siguientes radicales (considera que las variables y expresiones que aparecen son todas positivas):

a) $\sqrt[4]{a^2x^6} = \sqrt[4]{(ax^3)^2} = \sqrt{ax^3} = x\sqrt{ax}$

b) $\sqrt{x(x+y)^3} = (x+y)\sqrt{x(x+y)}$

c) $\left[\sqrt{a+1}\right]^5 = \sqrt{(a+1)^5} = (a+1)^2\sqrt{a+1}$

d) $\sqrt{1080} = \sqrt{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5} = 2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} = 6\sqrt{30}$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$

f) $\sqrt[4]{\dfrac{a^5+a^4}{16x^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{a^5+a^4}}{\sqrt[4]{16x^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{a^4(a+1)}}{2x} = \dfrac{a\sqrt[4]{a+1}}{2x}$

g) $\sqrt[4]{a^2+2ab+b^2} = \sqrt[4]{(a+b)^2} = \sqrt{a+b}$

A veces es necesario **introducir factores en un radical**, para ello es necesario elevarlos a un exponente igual al índice del radical.

a) $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$

b) $a\sqrt[5]{b^3c^2} = \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{b^3c^2} = \sqrt[5]{a^5b^3c^2}$

c) $x^2y\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{(x^2y)^3z} = \sqrt[3]{x^6y^3z}$

d) $(a+b)\sqrt[3]{\dfrac{3}{a+b}} = \sqrt[3]{\dfrac{3(a+b)^3}{a+b}} = \sqrt[3]{3(a+b)^2}$

e) $\dfrac{1}{x+3}\sqrt{x^2+5x+6} = \sqrt{\dfrac{x^2+5x+6}{(x+3)^2}} = \sqrt{\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+3)^2}} = \sqrt{\dfrac{x+2}{x+3}}$

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Escribe las siguientes potencias como raíces.

a) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{2/3}$ b) $(xy)^{3/11}$ c) $\left(\dfrac{m}{n}\right)^{4/5}$ d) $13^{-1/3}$ e) $\left(\dfrac{5}{8}\right)^{-1/3}$ f) $(0.06)^{-2/3}$

A2) Determina el valor de las siguientes expresiones.

a) $4^{1/2} =$ b) $81^{1/4} =$ c) $125^{2/3} =$ d) $32^{2/5} =$ e) $64^{4/6} =$

f) $16^{2/4} =$ g) $\left(7^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}} =$ h) $\left(6^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} =$

A3) Escribe las siguientes raíces como potencias.

a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt[4]{10}$ c) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$ d) $\sqrt[7]{x^2}$ e) $\sqrt[6]{(ab)^3}$ f) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}$

A4) Escribe las siguientes raíces con el menor índice posible:

a) $\sqrt[8]{3^4}$ b) $\sqrt[6]{x^2y^4}$ c) $\sqrt[9]{(x+y)^6}$ d) $\sqrt[12]{6^4x^8}$

A5) Escribe las siguientes raíces con el índice n indicado.

a) $\sqrt[3]{3^5}$ $(n=6)$ b) $\sqrt{2^5}$ $(n=4)$

c) $\sqrt[5]{x^5y^3}$ $(n=10)$ d) $\sqrt[7]{\left(\frac{x+y}{2}\right)}$ $(n=21)$

A6) Aplica las propiedades de las potencias y simplifica en los casos posibles.

a) $a^{1/3} \cdot a^{1/2}$ b) $x^{2/3} \cdot y^{1/6} \cdot x^{1/2}$ c) $(a^5)^{-1/2}$

d) $(2a^4b^6)^{3/2}$ e) $(x^6)^{1/2}$ f) $a^{-1/2} \div b^{-1/2}$

A7) Efectúa las operaciones indicadas dejando la respuesta con exponente racional. Considera positivas las variables.

a) $(x^{1/3} - x^{1/2})x$ b) $(a^{1/2} + b^{1/2})(a^{1/2} - b^{1/2})$

c) $(a^{1/2} + b^{-1/2})^2$ d) $(x^{-1/2} \cdot y^{1/2})^{1/4}$

e) $(2x^{1/2} + 3 + x^{-1/2})(x + x^{1/2})$ f) $(x^{1/3} + y^{1/3})(x^{2/3} - x^{2/3}y^{1/3} + y^{2/3})$

A8) Calcula aplicando las propiedades de las potencias y da tu respuesta en forma de raíz.

a) $\sqrt[7]{y^2} \cdot \sqrt[3]{y^{-1}}$ b) $\sqrt[8]{a^3} \cdot \sqrt[12]{a}$ c) $\sqrt[3]{b^2\sqrt{b}}$ d) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[4]{x^{-3}}}$ e) $\sqrt[8]{x\sqrt{x^3}}$ f) $\sqrt{\sqrt[3]{4x}}$

A9) Calcula aplicando las propiedades de los radicales.

a) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[3]{-20}$ b) $\sqrt[3]{40} \div \sqrt[3]{-5}$ c) $\sqrt[4]{a^2}$ d) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4$ e) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{6}}$ f) $\sqrt[3]{3^6 : 5^3}$

g) $\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ h) $\sqrt{a\sqrt{a}}$ i) $\sqrt[4]{a^{2n+1}}\sqrt[4]{a^{-1}}$ j) $\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}$

A10) Simplifica los siguientes radicales.

a) $\sqrt[6]{16}$ b) $\sqrt[6]{a^3}$ c) $\sqrt[6]{(x+y)^8}$ d) $\sqrt[n]{a^{n^2}}$ e) $\sqrt[4]{x^7}$ f) $\sqrt{24a(b+c)^3}$

g) $\sqrt{25x^3 - 50x^2}$ h) $\sqrt[4]{\frac{128\,(a-b)^5}{81\,(a+b)^4}}$

A11) Introduce el factor en el radicando.

a) $5\sqrt[3]{a^2}$ b) $2x\sqrt{4y}$ c) $a\sqrt[6]{\frac{3x}{a^2}}$ d) $(x+y)\sqrt[4]{\frac{2}{x+y}}$ e) $(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$

f) $a^2\sqrt[n]{a}$

Reducción de radicales a un índice común

En la práctica se hace necesario calcular con radicales que tienen índices diferentes y, para hacerlo, en muchas ocasiones es necesario reducirlos a un índice común. Esta reducción a un índice común es completamente análoga a la reducción de fracciones a un denominador común; recuerda que los radicales se pueden escribir como potencias de exponente racional.

> Para reducir dos radicales a un índice común:
>
> 1) Se busca el mcm de los índices.
>
> 2) En cada radical, se multiplica el índice y el exponente del radicando por el factor necesario para que el índice sea el mcm hallado.

Así, los radicales $\sqrt[9]{a^2}$, $\sqrt[6]{a}$ se pueden expresar con el mismo índice de la forma siguiente:

mcm de 9 y 6 es 18 ; $18 \div 9 = 2$, $18 \div 6 = 3$

$\sqrt[9]{a^2} = \sqrt[9\cdot 2]{a^{2\cdot 2}} = \sqrt[18]{a^4}$ (aplicando la propiedad $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$)

$\sqrt[6]{a} = \sqrt[6\cdot 3]{a^{1\cdot 3}} = \sqrt[18]{a^3}$

Ejemplo Reduce los siguientes radicales a un índice común:

a) $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[8]{a^5}$ $(a \geq 0)$

Resolución: a) mcm $(2 ; 3) = 6$ luego: $\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$

$\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{16}$

b) mcm $(3 ; 4 ; 8) = 24$ luego

$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[24]{a^{18}}$; $\sqrt[3]{a} = \sqrt[24]{a^8}$; $\sqrt[8]{a^5} = \sqrt[24]{a^{15}}$

Actividades de aprendizaje

A1) Reduce los siguientes radicales a un índice común. Considera positivas todas las variables y expresiones que aparecen.

a) $\sqrt{5}$; $\sqrt[4]{a^3}$ b) $\sqrt{9}$; $\sqrt[4]{64}$ c) $\sqrt{xy}$; $\sqrt[3]{a^2b}$ d) $\sqrt[3]{ax^2 - y^2}$; $\sqrt[6]{a + b^2}$; $\sqrt[9]{x - 1}$

e) $\sqrt[3]{xy}$; $\sqrt{x}$; $\sqrt[15]{xz}$ f) $\sqrt[8]{xzy}$; $\sqrt[3]{\dfrac{z}{y}}$; $\sqrt[12]{x}$

Radicales semejantes. Suma y resta de radicales

Cuando los términos algebraicos con que se trabaja son radicales tenemos un caso especial de términos semejantes. Así:

Los radicales que tienen igual índice e igual radicando se llaman **radicales semejantes**.

Son semejantes los radicales siguientes:

a) $\sqrt{a}$; $5\sqrt{a}$ b) $2\sqrt[3]{7}$; $-5\sqrt[3]{7}$ c) $2a^2b\sqrt[5]{x+y}$; $3ab^2\sqrt[5]{x+y}$ d) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{x^2-3x}$; $a^2\sqrt[4]{x^2-3x}$

No son semejantes $4\sqrt{2}$, $6\sqrt[3]{2}$; tampoco lo son $8\sqrt[4]{x}$, $3\sqrt{y}$.

Para sumar y restar radicales semejantes procederemos igual que cuando reducimos términos semejantes polinomiales o racionales.

Ejemplos

Calcula:

a) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

b) $-8\sqrt[3]{a}+6\sqrt[3]{a}=-2\sqrt[3]{a}$

c) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{a^3}+\frac{1}{3}\sqrt[4]{a^3}=\frac{5}{6}\sqrt[4]{a^3}$

d) $0.5\sqrt{x+y}-\sqrt{x+y}+3\sqrt{x+y}=2.5\sqrt{x+y}$

e) $a\sqrt[5]{5b}+3\sqrt[5]{5b}-b\sqrt[5]{5b}=(a+3-\mathrm{b})\sqrt[5]{5b}$

f) $5\sqrt[6]{3xy}-2\sqrt[5]{a}+4\sqrt[6]{3xy}=9\sqrt[6]{3xy}-2\sqrt[5]{a}$

Así pues, solo se pueden sumar y restar radicales si estos son semejantes. Para poder determinar si dos o más radicales son semejantes, debe primeramente simplificarse cada radical, como se muestra en los ejemplos siguientes.

Ejemplos

Calcula:

a) $3\sqrt{8}-2\sqrt{18}+4\sqrt{50}=3\sqrt{4\cdot 2}-2\sqrt{9\cdot 2}+4\sqrt{25\cdot 2}=6\sqrt{2}-6\sqrt{2}+20\sqrt{2}=20\sqrt{2}$

b) $4\sqrt[3]{5}-6\sqrt[6]{25}+\sqrt[9]{x^3}=4\sqrt[3]{5}-6\sqrt[6]{5^2}+\sqrt[9]{x^3}=4\sqrt[3]{5}-6\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{x^3}=-2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{x}$

f) $3\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{4}{x-1}\sqrt{x^2-1}-\sqrt[4]{\frac{x^2+2x+1}{(x-1)^2}}=3\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+4\sqrt{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}}-\sqrt[4]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}}$

$=3\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+4\sqrt{\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}}-\sqrt[4]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}=3\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+4\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=6\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Efectúa las siguientes sumas y/o restas.

a) $4\sqrt{7}+2\sqrt{7}$

b) $5\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{6}$

c) $\sqrt{20}-\sqrt{45}+4\sqrt{5}$

d) $7\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{x}+15\sqrt[5]{x}$

e) $2\sqrt{x}-13\sqrt{y}-6\sqrt{x}+8\sqrt{x}+22\sqrt{y}$

f) $a\sqrt{a^2b^3c}+\mathrm{b}\sqrt{a^3bc^2}+c\sqrt{a^2b^3c}$

g) $\sqrt{x(x+y)^2}-\sqrt{x(x-y)^2}-\frac{1}{x}\sqrt{x^3y^2}$

h) $4x\sqrt{\frac{3a}{x}}-9a\sqrt{\frac{x}{3a}}+ax\sqrt{\frac{3}{ax}}$

i) $\sqrt{\frac{2a^3}{b^3}}+a^2\sqrt{\frac{18}{ab^3}}+\frac{b}{5}\sqrt{\frac{50a}{b^5}}-\frac{b^2}{a}\sqrt{\frac{32a^5}{b^7}}$

j) $xy^2\sqrt[m]{x^{m+1}}+\sqrt[m]{x^{2m+1}y^{2m}}$

Multiplicación y división de radicales

En la multiplicación y división de radicales se aplican las propiedades:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b} \qquad \sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\div b}$$

por tanto, es necesario que los radicales tengan el mismo índice. En la práctica:

Para multiplicar o dividir radicales diferenciamos dos casos:

(a) Los radicales tienen igual índice

(b) Los radicales tienen índices diferentes

Procedimientos: En el caso (a) aplicamos directamente las propiedades anteriores. Y en el caso (b) reducimos primero a un índice común y después aplicamos dichas propiedades.

Ejemplos

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(3\sqrt{3})(-5\sqrt{2})=(7)(-5)\sqrt{(3)(2)}=-35\sqrt{6}$

b) $(ab\sqrt[3]{x+1})(bc\sqrt[3]{x-1})=ab^2c\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}=ab^2c\sqrt[3]{x^2-1}$

c) $(2\sqrt{5})(6\sqrt[3]{2})=(2\sqrt[6]{5^3})(6\sqrt[6]{2^2})=12\sqrt[6]{(125)(4)}=12\sqrt[6]{500}$

d) $(\sqrt{18x^3})\div(\sqrt{6x})=\sqrt{\dfrac{18x^3}{6x}}=\sqrt{3x^2}=(\sqrt{3})(\sqrt{x^2})=\sqrt{3}\,(|x|)$

e) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+1}}=\sqrt{\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}}=\sqrt{x-1}$

f) $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt[3]{x}}=\dfrac{\sqrt[6]{x^3y^3}}{\sqrt[6]{x^2}}=\sqrt[6]{\dfrac{x^3y^3}{x^2}}=\sqrt[6]{xy^3}$

g) $(8\sqrt{x}-5\sqrt{y})(3\sqrt{x}+4\sqrt{y})=24x+17\sqrt{xy}-20y$

h) $(\sqrt{x}+3\sqrt{y})^2=x+6\sqrt{xy}+9y$

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Efectúa las siguientes multiplicaciones (todas las variables y expresiones que aparecen son positivas).

a) $a\sqrt{b}\cdot b\sqrt{a}$ b) $\sqrt{xy}\cdot\sqrt{yz}\cdot\sqrt{zx}$ c) $3\sqrt{2a}\cdot x\sqrt{7b}$ d) $a\sqrt{2x}\cdot 3b\sqrt[4]{8x^3}$

e) $\sqrt{xy}\cdot\sqrt[3]{xy}$ f) $\dfrac{3}{a}\sqrt{a^2b^3c}\cdot\dfrac{1}{b}\sqrt{a^3b^5c^2}$ g) $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

h) $(2-\sqrt{3})^2$

a) Calcular el valor de la expresión algebraica: x^2-6x+7 para $x=3-\sqrt{2}$.

b) Calcular el valor de la expresión algebraica: x^2-2x-4 para $x=1+\sqrt{5}$.

A2) Determina el valor de las siguientes divisiones.

a) $\sqrt{88} \div \sqrt{11}$ b) $\sqrt{a^4b} \div \sqrt{a}$ c) $\sqrt{\dfrac{x^2}{y}} \div \sqrt{\dfrac{x}{y}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}\,\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

e) $3\sqrt{6} \div 2\sqrt[4]{3}$ f) $\sqrt[4]{a^5b^3} \div \sqrt[6]{ab}$ g) $2x\sqrt[3]{4y} \div 3\sqrt{2x}$ h) $\dfrac{\sqrt{xy} + \sqrt{x^2y}}{\sqrt{x}}$

A3) Efectúa las operaciones indicadas.

a) $\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{xy}\right)^2 =$

b) $\left[\left(\dfrac{\sqrt{a}}{b} + \dfrac{\sqrt{b}}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{b}}{a} - \dfrac{\sqrt{a}}{b}\right)^2\right]\sqrt{ab} =$

c) $\dfrac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}} =$

d) $\left[1 + \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right] \div \left(x + \sqrt{a^2 + b^2}\right) =$

Racionalización de denominadores

Para simplificar completamente un radical es necesario que no aparezcan radicales en el denominador. Esto puede lograrse mediante un procedimiento que se conoce como **racionalización de los denominadores.**

Ejemplos

Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{2\left(\sqrt[3]{5^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{5^2}\right)} = \dfrac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

c) $\dfrac{x^2 - y^2}{2x\sqrt{x+y}} = \dfrac{(x^2 - y^2)\sqrt{x+y}}{2x\sqrt{x+y}\,\sqrt{x+y}} = \dfrac{(x^2 - y^2)\sqrt{x+y}}{2x(x+y)} = \dfrac{(x+y)(x-y)\sqrt{x+y}}{2x(x+y)} = \dfrac{(x-y)\sqrt{x+y}}{2x}$

En el ejemplo anterior los denominadores contienen un solo radical, se trata de denominadores monomios, cuya racionalización es sencilla. Cuando en el denominador aparecen dos radicales que no son semejantes (no se pueden reducir) se habla de denominadores binomios y para racionalizarlos se hace uso de expresiones denominadas conjugadas, tales como:

$$\boxed{\sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{y} \quad \sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

Ya que: $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$; se concluye que:

Si un denominador binomio se multiplica por su conjugada, se eliminan los radicales

Ejemplos

Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \dfrac{2(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \dfrac{2(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{-1} = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

b) $\dfrac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \dfrac{(x-y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \dfrac{(x-y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Y si el denominador es de la forma $a - b\sqrt{m}$ (o también, $a + b\sqrt{m}$) su conjugada es $a + b\sqrt{m}$ (o respectivamente, $a - b\sqrt{m}$) y se cumple que:

$$\boxed{(a - b\sqrt{m})(a + b\sqrt{m}) = (a)^2 - (b\sqrt{m})^2 = a^2 - b^2 m}$$

Ejemplos

Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{5}\,(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{3-1} = \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{x}}{ax+b\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}\,(ax-b\sqrt{x})}{(ax+b\sqrt{x})(ax-b\sqrt{x})} = \dfrac{ax\sqrt{x}-bx}{a^2x^2-b^2x} = \dfrac{x(a\sqrt{x}-b)}{x(a^2x-b^2)} = \dfrac{a\sqrt{x}-b}{a^2x-b^2}$

Si bien es cierto que usualmente se racionalizan los denominadores con el propósito de simplificar completamente el radical, este procedimiento es igualmente válido si se necesitara **racionalizar el numerador**, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo donde se racionaliza el numerador:

$$\frac{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{x-9y} = \frac{(\sqrt{x}+3\sqrt{y})(\sqrt{x}-3\sqrt{y})}{(x-9y)(\sqrt{x}-3\sqrt{y})} = \frac{x-9y}{(x-9y)(\sqrt{x}-3\sqrt{y})} = \frac{1}{\sqrt{x}-3\sqrt{y}}$$

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) En las siguientes expresiones explica por qué son erroneas en lo general:

a) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ b) $\sqrt{a-b} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$ c) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

A2) Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{2\sqrt{3x}}{\sqrt{7y}}$ b) $\dfrac{a}{y\sqrt[4]{x^3y}}$ c) $\dfrac{2x}{\sqrt[4]{2xy^3}}$ d) $\dfrac{\sqrt{7x}}{\sqrt[3]{9x^2}}$ e) $\sqrt{\dfrac{3}{x-1}}$ f) $\sqrt{\dfrac{a}{b^2c}}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ h) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ i) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ j) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ k) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}$

3.3 Logaritmos: concepto y definición

Hace no muchos años, no había computadoras, ni calculadoras, y por lo tanto multiplicar, dividir, calcular potencias y raíces cuando los números implicados eran grandes, era una tarea complicada y difícil, y con mucha posibilidad de cometerse errores. En cambio, con los logaritmos, tal como se infiere de sus propiedades, las multiplicaciones se convierten en sumas, las divisiones en restas, la exponenciación en multiplicaciones y la extracción de raíces en divisiones, con lo que se facilitaban mucho las operaciones.

¿Qué son los logaritmos?

Se sabe que $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 10$, y que si, $10^x = 10000$, entonces $x = 4$. Este último resultado suele expresarse de la siguiente manera; el logaritmo de 10000 en base 10 es igual a 4, y se representa simbólicamente como: $\log_{10} 10000 = 4$.

De igual manera: el logaritmo de 9 en base 3 es igual a 2, $\log_3 9 = 2$

el logaritmo de 125 en base 5 es igual a 3, $\log_5 125 = 3$

y el logaritmo de 400 en base 20 es igual a 2, $\log_{20} 400 = 2$.

De los ejemplos anteriores se concluye que: el logaritmo de un número real x, o de una expresión algebraica, en una base b, es el exponente y al que hay que elevar la base b para que nos dé dicho número x. O sea:

$$\boxed{y = \log_b x \quad \Leftrightarrow \quad b^y = x}$$

Nota: Por cuestiones teóricas y prácticas la base de un logaritmo suele limitarse a los números reales positivos diferentes de uno, lo cual implica que no exista el logaritmo de números reales negativos. Las bases más comunes son: $b = 10$ y $b = e = 2.71828...$ Cuando la base es diez el logaritmo se llama ***logaritmo común o decimal***, y cuando la base es el número irracional $e = 2.71828...$ el logaritmo se llama ***logaritmo neperiano o natural.*** Ambos logaritmos se simbolizan respectivamente como:

$$\log x \quad \text{y} \quad \text{In}\, x$$

Ejemplos

a) $\log_2 32 = 5$(logaritmo en base 2 de 32 es igual a 5), porque: 5 es el exponente al que hay que elevar 2 para que nos dé 32, $2^5 = 32$.

b) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ (logaritmo en base 2 de $\frac{1}{8}$ es igual a -3), porque: -3 es el exponente al que hay que elevar 2 para que nos dé $\frac{1}{8}$, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

c) $\log 0.01 = -2$ (logaritmo en base 10 de 0.01 es igual a -2), porque: -2 es el exponente al que hay que elevar 10 para que nos dé 0.01, $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$.

d) $\text{In}\, 1 = 0$ (logaritmo en base e de 1 es igual a 0), porque: 0 es el exponente al que hay que elevar e para que nos de 1, $e^0 = 1$.

Propiedades y leyes de los logaritmos

De la definición de logaritmo y de las leyes de los exponentes se pueden demostrar algunas propiedades y/o leyes de los logaritmos que son de gran utilidad para los cálculos, por ejemplo:

Si $\log_b A = z$ y $\log_b B = y$, entonces:

$\log_b A + \log_b B = z + y$, y, $\log_b A - \log_b B = z - y$, pero también por la definición de logaritmo y/o leyes de exponentes, $b^z = A$, $b^y = B$, $A \cdot B = b^z \cdot b^y = b^{z+y}$, $\frac{A}{B} = \frac{b^z}{b^y} = b^{z-y}$, $\log_b A \cdot B = z + y$ y $\log_b \frac{A}{B} = z - y$ de donde: $\log_b A + \log_b B = z + y = \log_b A \cdot B$ y $\log_b A - \log_b B = z - y = \log_b \frac{A}{B}$

En resumen:

1. Dos números iguales tienen logaritmos iguales: Si $N = W \quad \Rightarrow \quad \log_b N = \log_b W$.
2. El logaritmo de la base es 1: $\log_b b = 1$, *porque*, $b^1 = b$.
3. El logaritmo de 1 es 0, cualquiera que sea la base b: $\log_b 1 = 0$, *porque*, $b^0 = 1$.
4. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\boxed{\log_b (A \cdot B) = \log_b A + \log_b B}$$

Ejemplo | $\log_2 (8 \times 4) = \log_2 8 + \log_2 4$

5. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador:

$$\boxed{\log_b (A/B) = \log_b A - \log_b B}$$

En particular: $\log_b (1/a) = \log_b 1 - \log_b a = 0 - \log_b a = -\log_b a$

Ejemplos | $\log_2 (8/4) = \log_2 8 - \log_2 4$

$\log_2 (1/8) = -\log_2 8 = -3$

6. El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base de la potencia:

$$\boxed{\log_b A^n = n \cdot \log_b A}$$

Ejemplo | $\log_3 9 = \log_3 (3)^2 = \log_3 (3 \times 3) = \log_3 3 + \log_3 3 = 2 \times \log_3 3$

7. El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice:

$$\boxed{\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{\log_b A}{n}}$$

Ejemplo | $\log \sqrt[3]{5} = \log 5^{1/3} = \frac{1}{3} \log 5 = \frac{\log 5}{3}$

8. Para el cambio de base, el logaritmo en base "a" de un número se puede obtener a partir de logaritmos en otra base b:

$$\boxed{\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}}$$

Ejemplo | $\log_5 25 = 2 \quad \Rightarrow \quad 5^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad \log_3 5^2 = \log_3 25 \quad \Rightarrow \quad 2 \times \log_3 5 = \log_3 25$

$\Rightarrow \quad 2 = \dfrac{\log_3 25}{\log_3 5} \quad \Rightarrow \quad \log_5 25 = \dfrac{\log_3 25}{\log_3 5}$

Cálculo de logaritmos con calculadora

Para calcular el logaritmo de cualquier número se puede usar una calculadora científica tal como se ilustra en los siguientes ejemplos:

- Para logaritmos decimales o de base 10:

tecla		teclear		tecla		pantalla
log	→	68	→	=	→	1.8325

$\therefore \ \log_{10} 68 = \log 68 = 1.8325$

- Para logaritmos naturales o de base $e = 2.71828...$:

$\boxed{\text{In}} \to \boxed{100} \to \boxed{=} \to \boxed{4.60517}$ $\quad \therefore \ \log_e 100 = \text{In } 100 = 4.60517$

- Para logaritmos de otras bases (se aplica la propiedad 8):

$$\log_2 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 2} = \frac{\log 15}{\log 2} = \frac{1.176}{0.301} = 3.907$$

Cuando se aplican los logaritmos es frecuente tener que determinar un número x del cual se conoce su logaritmo y en una cierta base b, o sea: se tiene la ecuación $\log_b x = y$, donde x (llamado también como ***antilogaritmo*** de y) es la incógnita por determinar.

Hay casos donde es sencillo determinar el valor de x, como sucede en los siguientes ejemplos:

$\log_3 x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 3^4 = 81 \qquad\qquad \log_2 x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 2^5 = 32$

Sin embargo, hay otros casos donde determinar el valor de x de manera inmediata puede resultar sumamente complicado, como ocurre al tener que resolver la siguiente ecuación: $\log x = 2.4$, ya que aquí $x = 10^{2.4}$, de donde, en forma inmediata únicamente podemos afirmar que $100 < x < 1000$.

Los ***antilogaritmos*** suelen representarse mediante la expresión: $x = \text{antilog}_b\, y$. Y se pueden determinar fácilmente con una calculadora científica tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

- Calcular en base diez el antilogaritmo de 2.4: $x = \text{antilog}_{10} 2.4 = ?$

$\boxed{\text{Schift}} \to \boxed{\log 2.4 =} \to \boxed{251.1886}$ $\quad \therefore \ x = \text{antilog}_{10} 2.4 = 251.1886$

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) En base a la definición de logaritmo calcule los logaritmos siguientes:

a) $\log_2 16 = y$ b) $\log_4 8 = y$ c) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \sqrt[4]{3} = y$ d) $\log_{16} 8^{-1} = y$

e) $\log_{\frac{1}{25}} 5 = y$ f) $\text{In } e^{-6} = y$ g) $\log_3 3^4 = y$ h) $\log 10^{a+b} = y$

i) $\log_3 \frac{1}{27} = y$ j) $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2} = y$ k) $\log_5 (-1) = y$ k) $\log_b 0 = y$

A2) Para qué valores de x están definidos los siguientes logaritmos:

$\log(4 - 8x)$ $\log_2 (x^2 - x)$ $\text{In } (e^x - 1)$

A3) Para qué valores de x se cumple que:

$\log_2 (8x) = 5$ $\log_2 (x^2 - x) = 1$ $\ln(x + 3) = 2$ $\log_x \sqrt[3]{7} = \frac{2}{3}$

$\log_x 81 = 4$ $\ln (3x - 4) = -1$ $\log_4^2 x + \log_4 x = 6$

A4) A partir de la definición de logaritmos, demostrar las siguientes propiedades:

$\boxed{\log_b A^n = n \cdot \log_b A}$ $\boxed{\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{\log_b A}{n}}$ $\boxed{\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}}$

$\boxed{\log_b a = [\log_a b]^{-1}}$ $\boxed{\log_b a = \log_{\sqrt{b}} \sqrt{a}}$ $\boxed{\log_b \left(\frac{1}{b}\right)^k = -k}$

$\boxed{\ln (A \cdot B) = \ln A + \ln B}$ $\boxed{\ln (A / B) = \ln A - \ln B}$

A5) Escriba las siguientes expresiones como sumas y restas de logaritmos:

$\log_b \left[\frac{x (y + 1)^5}{z^2}\right] =$ $\log_b \frac{x^3 (x + 1)^{3/5}}{x + 2} =$

A6) Escriba las siguientes expresiones como un solo logaritmo:

a) $2\log_b x - 0.5 \log_b y + \frac{\log_b z}{3} =$ b) $\log(x - y) + \log (x^2 - 2xy + y^2) - 3\log(x + y) =$

A7) Aplicando las propiedades de los logaritmos, y mediante una calculadora, determina el valor de R en las siguientes operaciones:

a) $R = \frac{(3.74)^5 (2.47)}{\sqrt{15}}$ b) $R = \frac{\sqrt[5]{331}}{6^{0.3}}$ c) $R = \sqrt{\frac{10^{1.6}(4 - \sqrt{3})}{\log_2 50}} + \ln\sqrt{5}$

A8) Si $\log_b x = \frac{3}{4}$ y $\log_b w = \frac{1}{2}$; determina el valor de:

$\log_b(x \cdot w) =$ $\log_b \sqrt[3]{(x \cdot w)} =$ $\log_b \left(\frac{x}{w}\right) =$

Aplicaciones de las potencias y los logaritmos a la resolución de ecuaciones y problemas de las ciencias e ingenierías

La invención de los logaritmos contribuyó al avance de la ciencia facilitando la modelación matemática y la realización de cálculos muy complejos. Además de su utilidad en el cómputo, los logaritmos también ocuparon un importante lugar en el desarrollo de las matemáticas avanzadas.

Una ilustración del poder de estos nuevos métodos de cálculo se muestra en el siguiente ejemplo: calcular por logaritmos la raíz cúbica de 65, o sea, determinar $x = \sqrt[3]{65}$. Resolución aplicando las propiedades 1 y 7 de logaritmos:

$$x = \sqrt[3]{65} \quad \Rightarrow \quad \log x = \log \sqrt[3]{65} = \frac{\log 65}{3} = \frac{1.813}{3} = 0.6043$$

$$\therefore \quad x = \text{antilog } 0.6043 = 4.02 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{65} = 4.02$$

También de manera frecuente en matemáticas aparecen ecuaciones como las siguientes que requieren de los logaritmos para su resolución:

$$3^{x+4} = 5^{x+2} \qquad \log_6(x+3) + \log_6(x-2) = 1 \qquad \begin{cases} 3^{2x-y} = 10 \\ 5^{x-2y} = 100 \end{cases}$$

Así, la ***ecuación exponencial*** $3^{x+4} = 5^{x+2}$ y la ***ecuación logarítmica*** $\log_6(x + 3) + \log_6(x - 2) = 1$ pueden resolverse con logaritmos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 3^{x+4} = 5^{x+2} &\Rightarrow \log 3^{x+4} = \log 5^{x+2} \\ &\Rightarrow (x+4)\log 3 = (x+2)\log 5 \\ &\Rightarrow x\log 3 + 4\log 3 = x\log 5 + 2\log 5 \\ &\Rightarrow x\log 3 - x\log 5 = 2\log 5 - 4\log 3 \\ &\Rightarrow x(\log 3 - \log 5) = \log 5^2 - \log 3^4 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\log 25 - \log 81}{\log 3 - \log 5} = \frac{1.398 - 1.908}{0.477 - 0.699} = 2.301$$

$$\begin{aligned} &\log_6(x+3) + \log_6(x-2) = 1 \\ &\Rightarrow \log_6(x+3)(x-2) = 1 \\ &\Rightarrow (x+3)(x-2) = 6^1 = 6 \\ &\Rightarrow x^2 + x - 6 = 6 \\ &\Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \\ &\Rightarrow (x-3)(x+4) = 0 \\ &\therefore \quad x_1 = 3 \text{ y } \cancel{x_2 = -4} \text{ (porqué)} \end{aligned}$$

Mientras que el sistema se puede resolver como:

$$\begin{cases} 3^{2x-y} = 10 \\ 5^{x-2y} = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log 3^{2x-y} = \log 10 = 1 \\ 5^{x-2y} = \log 100 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} (2x-y)\log 3 = 1 \\ (x-2y)\log 5 = 2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 2x - y = 1/\log 3 = 2.096 \\ x - 2y = 2/\log 5 = 2.861 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2x - y = 2.096 \\ (-2)(x-2y) = (-2)(2.861) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2x - y = 2.096 \\ -2x + 4y = -5.722 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{3y = -3.626\} \Rightarrow \{y = -3.626/3 = -1.2\} \Rightarrow \{x = 2.861 + 2y = 2.861 + 2(-1.2) = 0.461\}$$

Una **aplicación financiera** de las potencias se presenta cuando una persona deposita un capital en un banco durante un cierto tiempo y el banco le paga intereses. Dependiendo de que se retiren o no los intereses periódicamente, el interés se llama simple o compuesto.

Problema: ¿En cuánto se convierte un capital de \$10,000.00 al 15 % en dos años a interés compuesto?

Resolución: ***El capital acumulado en el primer año es***

$$C_1 = \$10{,}000.00 + \$(10{,}000.00)(0.15) = \$10{,}000.00\ (1+0.15) = \$11{,}500.00$$

Como los intereses ganados el primer año no se retiran, entonces el nuevo capital inicial es de \$11,500.00 y ***el capital acumulado a interés compuesto en el segundo año es:***

$$C_2 = \$11{,}500.00 + \$(11{,}500.00)(0.15) = \$11{,}500.00\ (1+0.15) = \$13{,}225.00$$

Aunque el problema ya está resuelto, para efecto de observar regularidades en el resultado lo reescribimos de la siguiente manera:

$$C_1 = \$11{,}500.00 = \$10{,}000.00\ (1 + 0.15)$$

$$C_2 = \$13{,}225.00 = \$11{,}500.00\ (1 + 0.15) = (\$10{,}000.00)(1 + 0.15)(1 + 0.15)$$

$$= (\$10{,}000.00)(1 + 0.15)^2 = \$13{,}225.00$$

Observando los resultados finales para C_1 y C_2, ¿cuál crees sería el capital final acumulado (C_f) durante tres y cuatro años? ¿Cuál para t años?

En general, el capital final (C_f) que se obtiene con interés compuesto a partir de un capital inicial (C_i) capitalizable anualmente a t años, al tanto por ciento anual r, es:

$$C_f = C_i\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

Aplicando la fórmula para el ejemplo anterior se obtiene el mismo resultado:

$$C_f = C_i\left(1+\frac{r}{100}\right)^t = \$10{,}000.00\left(1+\frac{15}{100}\right)^2 = 10{,}000.00\,(1.15)^2 = \$13{,}225.00$$

En los cálculos anteriores del interés compuesto, se ha considerado que la capitalización es anualmente, sin embargo, frecuentemente los bancos capitalizan semestralmente, trimestralmente, mensualmente o incluso diariamente. En estos casos, en que la capitalización se realiza un número n de veces por año la fórmula se transforma en:

$$C_f = C_i\left(1+\frac{r}{100n}\right)^{n\cdot t}$$

De esta manera, si los \$10,000.00 del ejemplo anterior se capitalizaran con el 15% anual pero compuesto 4 veces al año, entonces el capital acumulado después de dos años sería de:

$$C_f = C_i\left(1+\frac{r}{100n}\right)^{n\cdot t} = \$10{,}000.00\left(1+\frac{15}{100\times 4}\right)^{(4)(2)} = 10{,}000.00\,(1.0375)^8 = \$13{,}424.7$$

Como puede observarse de la comparación de los resultados, la segunda forma de inversión resulta ser la más rentable.

Para efectos de planeación financiera resulta importante poder determinar, por ejemplo, ¿cuánto tiempo se requiere para que con este mismo plan de inversión más rentable el capital acumulado sea de \$25,000.00? **Resolución:**

$$C_f = \$10{,}000.00\,(1.0375)^{4t} = \$25{,}000.00 \;\Rightarrow\; (1.0375)^{4t} = \frac{25{,}000.00}{10{,}000.00} = 2.5$$

$$\Rightarrow\; \log(1.0375)^{4t} = \log 2.5 \;\Rightarrow\; 4t = \frac{\log 2.5}{\log 1.0375} = 24.9 \;\Rightarrow\; t = \frac{24.9}{4} = 6.225 \textit{ años}$$

Otras aplicaciones de sumo interés práctico se presentan cuando en las Ciencias Naturales se dan situaciones en que se tienen que utilizar medidas de órdenes muy diferentes. Por ejemplo, si tenemos que referirnos a diferentes animales por sus pesos o hacer una gráfica con los mismos, es un gran inconveniente que haya tan enormes diferencias entre unos y otros.

Una solución para abreviar la expresión de esas diferencias es asignar a cada animal el logaritmo decimal de su peso, al que llamaremos el **"orden de magnitud".** Por ejemplo: el rotífero: –8.22; la mosca: –5.3 ; el pez gobio: –2.7 ; el pájaro mosca: 0.30 ; el escarabajo gigante : 2.00 ; el hombre: 4.96 ; el elefante: 6.9 ; la ballena: 8.08. Esto es lo que se llama una ***escala logarítmica***.

Ahora ya podemos, por ejemplo, hacer una escala con todos los animales que no sea excesiva. El orden de magnitud de cada animal será un número entre –9 y 9 y llamaremos: muy pequeños a los que estén en el intervalo (–9 , –5); pequeños a los que estén en (–5, –2); medianos a los que estén en (–2, 2); grandes a los que estén en (2, 5) y muy grandes a los que estén en (5, 9). De esta manera en un rango pequeño, en este caso de –9 a 9, se consigue expresar realidades muy diferentes.

Las tres escalas logarítmicas usadas comúnmente son la escala Richter, la *escala de decibeles* y la escala *pH*. Las escalas logarítmicas pueden ser muy útiles, pero ¡cuidado!... sólo si se entienden bien. Decir que la ballena es de orden 8 y el hombre es de orden 5, no significa que una ballena pese casi el doble que un hombre, sino $10^{8-5} = 10^3 = 1000$ veces más.

En Geología la escala logarítmica que ha sido desarrollada para medir la intensidad de los terremotos se le conoce como la escala de Richter que lleva el nombre del sismólogo americano Charles Richter (1900-1985). Así, la fuerza de un terremoto medida por la escala de Richter está dada por la expresión $R = \log(E/E_0)$, donde E es la intensidad de las vibraciones del terremoto medido y es la intensidad de la unidad de un terremoto estándar. Esta unidad estándar es medida por un instrumento conocido como un sismógrafo, el cual detecta las vibraciones en la corteza terrestre.

El día 14 de mayo de 1995, el Servicio de Información Nacional de Terremotos de los Estados Unidos informó un terremoto en el sur de California que midió 3.0 en la escala de Richter, pero, pocas personas se dieron cuenta de esto. Anteriormente, ese mismo año, el día 17 de enero de 1995, un terremoto en Kobe, Japón, ocasionó 2000 muertos y miles de millones de dólares en daños. Éste midió 7.2 en la escala de Richter. ¿Cuán más severo fue el terremoto de Kobe, que el del sur de California?

Resolución: De acuerdo a la definición de la escala de Richter

$$3.0 = \log(E/E_0) = \log E\ (California) - \log E_0 \quad \text{y} \quad 7.2 = \log(E/E_0) = \log E\ (Kobe) - \log E_0$$

Restando las dos ecuaciones y usando la propiedad 5 de los logaritmos se obtiene que:

$$4.2 = \log E\ (Kobe) - \log E\ (California) \ \Rightarrow\ \log(E\ (Kobe/E\ (California)) = 4.2$$

$$\Rightarrow\ E\ (Kobe/E\ (California) = 10^{4.2} = 15848.9 \ \Rightarrow\ E\ (Kobe) = 15848.9 \times E\ (California)$$

En consecuencia, el terremoto de Kobe tuvo una intensidad 15,849 veces mayor que el terremoto de California. ¡Esta es la razón por la cual el terremoto de Kobe estuvo en las noticias nacionales! Debido a que la escala de Richter es una escala logarítmica, las diferencias pequeñas en los valores Richter (7.2 a 3.0, por ejemplo) se traducen en diferencias enormes en la intensidad de los terremotos. De donde, la escala de Richter es una medida comparativa, más que una medida absoluta.

Funciones exponencial y logarítmica (Opcional)

En la definición de logaritmo aparecen dos relaciones matemáticas estrechamente vinculadas entre sí, y de suma importancia, como son:

$$\boxed{y = \log_b x} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x = b^y}$$

las cuales reciben respectivamente el nombre de ***función logarítmica*** y ***función exponencial***.

Se dice que estas dos funciones son inversas entre sí, ya que si se aplica una después de la otra sobre un número x sus efectos se cancelan. Por ejemplo, para una base $b = 3$ y $x = 9$, se tiene que: $\log_3 9 = 2$ y $3^2 = 9$, o también, $3^9 = 19683$ y $\log_3 19683 = 9$.

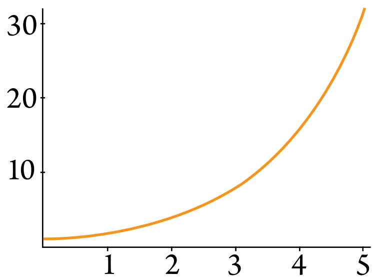
En general, se cumplen las relaciones: $\log_b b^x = x$ y $b^{\log_b x} = x$

Una problemática común donde aparecen estas funciones es cuando se está analizando un cultivo de bacterias, las que se reproducen cada hora (se dividen por la mitad), tal como se muestra en la siguiente tabla para los primeros cinco períodos.

1^er^ Período	2^do^ Período	3^er^ Período	4^to^ Período	5^to^ Período
2	$2 \times 2 = 4$	$4 \times 2 = 8$	$8 \times 2 = 16$	$16 \times 2 = 32$

¿Qué operación matemática se hace para calcular la cantidad de bacterias en cada período? Respuesta:____.

Si llevamos estos datos a un par de ejes cartesianos de manera que los períodos se ubiquen sobre las abscisas (eje de las X) y la cantidad de bacterias en las ordenadas (eje de las Y), se obtiene la siguiente gráfica:



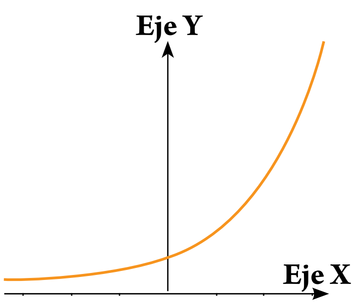
A partir del gráfico, podemos determinar "prácticamente" la cantidad de estas bacterias que habría en cualquier período.

Para determinar el ***modelo matemático*** que permite cuantificar el número de bacterias (y) en un cierto período (x) analicemos los valores de la tabla anterior. En el primer período, para $x = 1$, tenemos que $y = 2 = 2^1$, en el segundo, para $x = 2$, $y = 4 = 2^2$, en el tercero, para $x = 3$, $y = 8 = 2^3$, si generalizamos tenemos que en el período "x" el número de bacterias es 2^x. Así que la función exponencial que representa el número de bacterias es: $y = 2^x$.

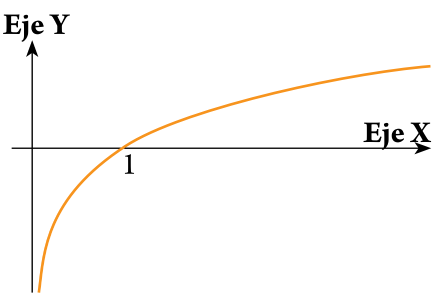
¿Cuántos períodos x se necesitan para obtener 512 bacterias? Para calcularlo basta con resolver la ecuación exponencial: $512 = 2^x$. O sea, necesitamos calcular el logaritmo de 512 en base $b = 2$, entonces:

$$x = \log_2 512 = \frac{\log 512}{\log 2} = 9$$

Del ejemplo anterior es evidente que tanto la función exponencial como la logarítmica pueden ser evaluadas y representadas en una tabla de valores y graficadas en un sistema de coordenadas rectangulares de la siguiente manera:



Función exponencial: $y = a^x$



Función logaritmica: $y = \log_b x \; ; \; x > 0$

Nota: En las funciones exponenciales ($y = a^x$) el **dominio de la función** es el conjunto de los números reales, ya que cualquier exponente real puede definir una potencia. El problema lo encontramos en las bases, éstas deben ser positivas, mayores que uno y distintas de cero. ¿Por qué sólo positivas?

Actividades de aprendizaje de la unidad 3 para resolver en equipo

A1) Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $2^{x+1} = 3^x$ b) $7^{2x-1} = 4^{3x-2}$ c) $2.97^x = 2.71^{x+2}$

d) $\log_5(2x-1) + \log_6(x+2) = 2$ e) $\log_3(x+6) = 3 - \log_3(2x-3)$

f) $\log_2(x^2 - 3x - 2) - \log_2(x-4) = 3$ g) $3(9^x) + 9 = 28(3^x)$

A2) Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} 5^{2x+3y} = 120 \\ 2^{3x+5y} = 30 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 13^{4x-y} = 15 \\ 7^{5x-y} = 50 \end{cases}$ c) $\begin{cases} e^{x-y} = e^3 \\ e^{x+2y} = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \log x + \log y = 4 \\ \log 2x - \log 5y = 1 \end{cases}$

A3) ¿Cuál es el capital acumulado a partir de un capital inicial de \$15,000.00 invertido al 18 % compuesto anualmente en tres años?

A4) ¿Cuál sería el capital acumulado, después de 8 años, de \$5,000.00 invertidos en la banca, si se capitalizan con el 20% anual pero compuesto 5 veces al año?

A5) En el año 1908 ocurrió un terremoto en San Francisco de California de intensidad 8.3 en la escala de Richter y otro en la frontera de Colombia y Ecuador de intensidad 8.9. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de Suramérica que el de San Francisco?

A6) Calcule la intensidad relativa de un terremoto cuyo número de Richter es de 6.7 en comparación con uno cuyo número de Richter es de 8.2.

A7) Calcule el número de Richter de un terremoto que tiene 4500 veces la intensidad de uno cuyo número de Richter es de 4.4.

A8) Para determinar la edad de una roca la ciencia geológica actualmente ha podido desarrollar una técnica basada en la concentración de material radiactivo en su interior. Cuanto más joven es la roca mayor concentración de material radiactivo encontraremos. Para calcular esta concentración la fórmula que se utiliza es $C(t) = k \times 3^{-t}$, donde $C(t)$ representa la concentración del material radiactivo, t el tiempo transcurrido medido en cientos de años y "k" la concentración del elemento en el momento de formarse la roca. Así para una roca con $k = 4500$, a) ¿Cuánto tiempo debe haber pasado para que hallemos en ella una concentración de 1500? ; b) ¿Qué concentración tendríamos al cabo de dos siglos?; c)¿En qué tiempo se acabaría este material?

A9) El número de bacterias en un cierto cultivo es $N(t) = N_0 \cdot 2^{kt}$, donde t se mide en horas. Si al cabo de 4 horas, el número de bacterias $\sqrt[8]{2}$ es veces lo que había al principio, ¿en qué tiempo se duplicará el número de bacterias?

4 Ecuaciones, funciones e inecuaciones cuadráticas

Propósito de la unidad

Resuelve y aplica las ecuaciones, funciones e inecuaciones cuadráticas, en la formulación y resolución de problemas de su vida cotidiana, y de algunas áreas de las ingenierías y las ciencias.

Contenido

- **Ecuaciones cuadráticas o de segundo grado:** Tipos de ecuaciones de segundo grado. Métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas: despeje, factorización, completando un trinomio cuadrado perfecto, fórmula general. Deducción de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado. Discriminante de la fórmula general y raíces reales de la ecuación de segundo grado. Ecuaciones de forma cuadrática.
- **Función cuadrática:** Definición y gráfica. Relación entre la ecuación y función cuadrática. Ceros y valores máximos o mínimos (vértice) de una función cuadrática. Determinación de una función cuadrática a partir de tres puntos de su gráfica.
- **Inecuaciones cuadráticas de una variable:** Definición y solución de inecuaciones cuadráticas. Representación del conjunto solución por medio de intervalos. Planteo y resolución de problemas que dan origen a inecuaciones cuadráticas.

Indicadores de desempeño

En esta unidad debe lograrse que los alumnos sean capaces de:

1) Definir, identificar y resolver las "ecuaciones de segundo grado con una variable o incógnita".
2) Desarrollar habilidades en la resolución de ecuaciones de segundo grado o que se puedan transformar en éstas, aplicando el despeje, la factorización o la fórmula general (según sea más pertinente).
3) Comprender la deducción de la fórmula general para la resolución de la ecuación de segundo grado. Así como, conocer el concepto "discriminante" y su relación con la cantidad de soluciones de la ecuación cuadrática.
4) Desarrollar habilidades en la resolución de problemas que conduzcan al planteo y resolución de ecuaciones de segundo grado o que se puedan transformar en éstas.
5) Reconocer la relación entre ecuación cuadrática y función cuadrática. Además de encontrar la función cuadrática a partir de tres puntos dados de su gráfica, y encontrar el valor máximo o mínimo (vértice de la gráfica o parábola) de una función dada.
6) Definir y comprender los conceptos de inecuación cuadrática y de su "conjunto solución". Y, desarrollar habilidades en la resolución de inecuaciones cuadráticas con una variable, y en su aplicación a la resolución de problemas que se resuelven mediante el planteo y resolución de este modelo matemático.

4 unidad

Actividad preliminar: ¿Qué es una ecuación cuadrática? ¿Qué es una función cuadrática?

Ver los siguientes videos:
https://www.youtube.com/watch?v=dXakJkBRpqM
https://www.youtube.com/watch?v=sdWh5CnYIx4
https://www.youtube.com/watch?v=0pUnHF1FJ2s

Introducción

En esta unidad continuarás con el estudio de las ecuaciones, inecuaciones y funciones, en particular, aprenderás sobre los procedimientos para resolver y aplicar las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas, y también las funciones e inecuaciones cuadráticas.

4.1 Problemas que originan ecuaciones de segundo grado o cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas se pueden originar a partir de la modelación matemática de una gran variedad de situaciones problemáticas. Por ejemplo, si cada estudiante de un grupo de primer grado de preparatoria escribe la dirección de los demás alumnos de su aula, y si en total se copian 600 direcciones, entonces el número de alumnos del grupo puede ser determinado a partir de la resolución de la ecuación cuadrática $n^2 - n - 600 = 0$, la cual puede obtenerse a partir del siguiente proceso de modelación:

Modelación y resolución del modelo: Sea n el número de alumnos del grupo, luego cada alumno escribirá la dirección de los demás menos la suya, o sea $(n - 1)$ direcciones, y si en total se escribieron 600 direcciones entonces podemos plantear la ecuación $n(n - 1) = 600$, la cual se puede resolver por factorización de la siguiente manera:

$$n\,(n-1) = 600, \quad \Rightarrow \quad n^2 - n = 600 \quad \Rightarrow \quad n^2 - n - 600 = 0 \quad \Rightarrow \quad (n-25)(n+24) = 0$$
$$\Rightarrow n - 25 = 0 \quad \text{o} \quad n + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 25 \quad \text{o} \quad n = -24$$

Ya que n representa el número de alumnos, la solución negativa no es posible para este problema. Por tanto, tomamos como solución $n = 25$ (Comprobación: $25 \times 24 = 600$). En conclusión (**respuesta**): El grupo tiene 25 alumnos.

Otra problemática que da origen a una ecuación cuadrática (derivada de un modelo matemático cuadrático) es cuando en la clase de Física se demuestra que la altura y de un cuerpo, después de t segundos de haber sido lanzado hacia arriba, desde el piso, con una velocidad inicial V_0, está dada por la fórmula:

$y = V_0 t - \frac{gt^2}{2}$ (donde: (donde $g = 9.8\ m/seg^2$ es la aceleración de la gravedad) y se pide calcular el tiempo para que el cuerpo regrese al suelo.

Por ejemplo, si en este problema físico una pelota es lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de 40 m/seg, entonces, su tiempo de vuelo se calcula resolviendo la ecuación cuadrática:

$-\frac{9.8}{2}t^2 + 40\,t = 0$, que se obtiene de sustituir los valores de las variables $V_0 = 40\ m/seg$ y $y = 0$ en el modelo correspondiente. Resolviendo esta ecuación también por factorización, se determina que:

$$-\frac{9.8}{2}t^2 + 40t = 0 \;\Rightarrow\; 4.9t^2 + 40t = 0 \;\Rightarrow\; t(-4.9t + 40) = 0$$
$$\Rightarrow t = 0 \quad \text{o} \quad -4.9t + 40 = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = 0\ seg \quad \text{o} \quad t_2 = \frac{-40}{-4.9} = 8.16\ seg$$

De donde, el tiempo $t_1 = 0\ seg$ queda descartado pues corresponde al momento inicial del movimiento y, por ende, el tiempo $t_2 = 8.16\ seg$ es el que requiere la pelota para regresar al nivel del suelo. Dos preguntas interesantes que se pueden hacer en este problema son: ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota? y ¿en qué tiempo alcanza la altura máxima?

De los ejemplos anteriores se puede decir que, en general, una ecuación de segundo grado o cuadrática es toda ecuación de la forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \quad a, b \text{ y } c \in \Re \text{ y } a \neq 0}$$

o que se pueda reducir a ella.

En una ecuación cuadrática completa aparecen tres términos, que son: ax^2 denominado término cuadrático, bx denominado término lineal y c que se llama término independiente. Cuando falta uno de estos términos, ya sea el lineal o el independiente, se dice que la ecuación está en forma incompleta.

Así, las ecuaciones siguientes son ejemplos de ecuaciones de segundo:

$$3x^2 - 6x + 105 = 0 \qquad n^2 - n - 600 = 0; \qquad -\frac{9.8}{2}t^2 + 80t = 0 \qquad 4x^2 - 9 = 0 \qquad 5x^2 = 0$$

de las cuales, únicamente las dos primeras están en forma completa o estándar.

Hay ecuaciones que en lo inmediato no parecen ser de segundo grado, sin embargo, mediante transformaciones algebraicas se transforman en ecuaciones cuadráticas en su forma estándar, por ejemplo:

$$x^2 = x + 3 \qquad 2x^2 = 8 \qquad n(n-1) = 600 \qquad (x-2)(x+1) = 10$$
$$(x-1)^2 + 2(x+1) = 0 \qquad \frac{1}{x} = x + 3 \qquad \frac{9}{x-2} - 5 = \frac{4}{x-7}$$

Métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas

Algunas ecuaciones de segundo grado, como ya se estudió en Matemáticas I, se resuelven fácilmente aplicando un simple despeje, o la descomposición factorial que requiere de la siguiente propiedad de los números reales:

$$\text{Si } a \text{ y } b \in \Re, \text{ se cumple: } a \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0$$

Ejemplos

Determina el conjunto solución de las ecuaciones siguientes

a) $x^2 - 2x - 35 = 0 \Rightarrow$ Factorizando el miembro izquierdo: $(x-7)(x+5) = 0$
Aplicando la propiedad anterior: $x - 7 = 0$ o $x + 5 = 0$
Despejando x: $x_1 = 7$ o $x_2 = -5$

Comprobación para $x_1 = 7$: $(7)^2 - 2(7) - 35 = 49 - 14 - 35 = 35 - 35 = 0$
Comprobación para $x_2 = -5$: $(-5)^2 - 2(-5) - 35 = 25 + 10 - 35 = 35 - 35 = 0$

Como $x_1 = 7$ y $x_2 = -5$, satisfacen la ecuación, entonces ambos son soluciones de la ecuación. Esto también pueden escribirse en forma de conjunto: $S = \{-5, 7\}$.

b) $4x^2 - 9 = 0$ (Resolución por factorización)

$(2x+3)(2x-3) = 0$

$2x + 3 = 0$ o $2x - 3 = 0$

$x_1 - \frac{3}{2}$ o $x_2 = \frac{3}{2}$

$4x^2 - 9 = 0$ (Resolución por despeje)

$4x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4}$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$

Comprobación para $x_1 = -\frac{3}{2}$: $4\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 9 = 0 \Rightarrow 4\left(\frac{9}{4}\right) - 9 = 0 \Rightarrow 9 - 9 = 0$

Comprobación para $x_2 = \frac{3}{2}$: $4\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 9 = 0 \Rightarrow 4\left(\frac{9}{4}\right) - 9 = 0 \Rightarrow 9 - 9 = 0$

Por tanto, el conjunto solución de la ecuación es: $S = \left\{x_1 = -\frac{3}{2}\ ,\ x_2 = \frac{3}{2}\right\}$.

c) $4x^2 + 9 = 0$. Ya que $4x^2 \geq 0$, en consecuencia, $4x^2 + 9 > 0$ y, por tanto, no es posible descomponer en factores este binomio y la ecuación no posee soluciones en el dominio de los números reales.

d)

$(x+3)^2 + 3x^2 = 10x + 8$	(Realizando las multiplicaciones)
$x^2 + 6x + 9 + 3x^2 = 10x + 8$	(Transponiendo términos)
$x^2 + 6x + 9 + 3x^2 - 10x - 8 = 0$	(Reduciendo términos semejantes)
$4x^2 - 4x + 1 = 0$	(Factorizando) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
$(2x-1)^2 = 0$	(Ya que: $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$)
$2x - 1 = 0$	$\therefore\ x = \frac{1}{2}$ (Despejando x)

Comprobación para $x = \frac{1}{2}$ $:\left(\frac{1}{2}+3\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10\left(\frac{1}{2}\right) + 8 \Rightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{4}\right) = 5 + 8$

$\Rightarrow \frac{49}{4} + \frac{3}{4} = 13 \Rightarrow \frac{52}{4} = 13 \Rightarrow 13 = 13 \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

e) $\dfrac{2}{x^2-4} + \dfrac{3}{x+2} = 1$

Para eliminar los denominadores basta multiplicar ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ para obtener:

$$\frac{2(x-2)(x+2)}{x^2-4} + \frac{3(x-2)(x+2)}{x+2} = (1)(x-2)(x+2)$$

$\Rightarrow\ 2 + 3(x-2) = (x-2)(x+2)$

$\Rightarrow\ 2 + 3x - 6 = x^2 - 4$

$\Rightarrow\ x^2 - 3x = 0$

$\Rightarrow\ x(x-3) = 0$

$\Rightarrow\ x_1 = 0 \quad \text{o} \quad x_2 - 3 = 0$

$\Rightarrow\ x_1 = 0 \quad \text{o} \quad x_2 = 3$

Comprobación para $x_1 = 0$: $\dfrac{2}{(0)^2 = 4} + \dfrac{3}{0+2} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{2}{-4} + \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

Comprobación para $x_2 = 3$:

$\therefore\ S = \{0, 3\}$

Nota: De los ejemplos resueltos anteriores se observa que hay ecuaciones de segundo grado que tienen dos soluciones, otras que tienen una sola solución y otras que no poseen soluciones en el conjunto de los números reales.

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Resuelve las ecuaciones siguientes por despeje o factorización:

a) $x^2 + 3x = 0$

b) $x^2 - 16 = 0$

c) $v^2 + 12 = 0$

d) $5y^2 - 8y = 0$

e) $8x^2 + 2x = 0$

f) $9w^2 - 12w + 4 = 0$

g) $5x^2 + 4 = 2(x+2)$

h) $x(x-1) - 5(x-2) = 2$

i) $(2x-3)^2 - (x+5) = 1$

j) $(2x+1)^2 = 4(x-2)$

k) $(x-2)(x+1) + 2(2-x) = x - 2$

l) $(x+3)^2 + (x-3)^2 = 10$

m) $3x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{11}{2}$

n) $3 - [5x^2 + (-12x^2 - 5x + 3)] = 6x^2 + 4x + 6$

ñ) $\dfrac{4x-1}{2x+3} = \dfrac{2x+1}{6x+5}$

o) $\dfrac{4x^2 - 3x + 5}{x^2 - 2x + 3} = 2$

p) $\dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{40}{x^2-4}$

q) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{2x+6}{x^2-2x-3}$

A2) Determina para qué valores de la variable x no están definidos los cocientes siguientes (recuerda que la división entre cero no está permitida):

a) $\dfrac{2}{x^2+6x}$

b) $\dfrac{1}{x^2-9}$

c) $\dfrac{x^2+5}{x^2-x-2}$

A3) Si una de las soluciones de la ecuación $4x^2 - 13x + m = 0$ es 4, determina el valor de m y la otra solución.

A4) Resuelve las ecuaciones siguientes por factorización:

a) $x^3 + 6x^2 = 0$ b) $x^3 - 9x^2 = 0$ c) $x^3 - x^2 - 2x = 0$

A5) En los siguientes problemas determina los números que se piden:

a) La suma de un número y su recíproco es 26/5. ¿Qué números satisfacen esta condición?
b) La diferencia de dos números es 7 y su suma multiplicada por el número menor es igual a 184. Halla los números.
c) Encuentra tres números consecutivos tales que el cociente del mayor entre el menor es igual a 3/10 del número intermedio.
d) Halla un número de dos dígitos en que la cifra de las decenas sea igual al cuadrado de la cifra de las unidades y la suma de los dos dígitos sea 12.
e) La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es igual al mayor más 10 veces la suma de ambos. ¿Cuáles son los números?
f) Si mi hermano es mayor que yo dos años y la suma de los cuadrados de nuestras edades es 340 años. ¿Qué edad tenemos cada uno?

A6) Si una pelota es lanzada desde el piso hacia arriba con una velocidad inicial de 30 m/seg, ¿cuál es su tiempo total de vuelo? y ¿en qué tiempo se encontrará a 10 metros de altura?

Resolución de la ecuación cuadrática por el método de completar un trinomio cuadrado perfecto y por la fórmula general

Ya conoces cómo resolver una ecuación de segundo grado aplicando la factorización o el despeje; pero hay ecuaciones cuadráticas completas donde estos procedimientos no son de fácil aplicación. En razón de lo anterior en este apartado conocerás y aplicarás una ***fórmula general*** para resolver ecuaciones de segundo grado completas e incompletas.

Para deducir dicha fórmula general, utilizaremos el ***Método de Completar un Trinomio Cuadrado Perfecto*** $(x^2 + 2xy + 2y)$ el cual resulta, como recordarás, de elevar un binomio $(x + y)$ al cuadrado, o sea $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Primero ilustraremos este método resolviendo la ecuación cuadrática completa particular $-4.9t^2 + 30t - 10 = 0$ (cuyos coeficientes son $a = -4.9$, $b = 30$ y $c = -10$) que resulta complicada resolverla por factorización:

$- 4.9t^2 + 30t - 10 = 0$ (Se divide la ecuación entre $a = - 4.9$

$\Rightarrow \dfrac{-4.9t^2 + 30t - 10}{-4.9} = \dfrac{0}{-4.9}$ (Se realiza la división en el segundo miembro: $\dfrac{0}{a} = 0$)

$\Rightarrow t^2 + \dfrac{30\,t}{-4.9} + \dfrac{-10}{-4.9} = 0$ (Se transpone el término lineal $\left(\frac{c}{a}\right)$ al segundo miembro)

$\Rightarrow t^2 + \dfrac{30\,t}{-4.9} = -\dfrac{-10}{-4.9}$ (Se suma $\left(\dfrac{c}{2a}\right)^2$ en los dos miembros de la ec. para formar el TCP)

$$\Rightarrow t^2+\frac{30\,t}{-4.9}+\left(\frac{30}{2(-4.9)}\right)^2=-\frac{-10}{-4.9}+\left(\frac{30}{2(-4.9)}\right)^2 \qquad \text{(Se factoriza el primer miembro de la ec.)}$$

$$\Rightarrow \left(t+\frac{30}{-2(-4.9)}\right)^2=-\frac{-10}{-4.9}+\left(\frac{30^2}{4(-4.9)^2}\right)=\frac{30^2-4(-4.9)(-10)}{4(-4.9)^2} \qquad \text{(Se ordena y simplifica)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(t+\frac{30}{2(-4.9)}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{30^2-4(-4.9)(-10)}{4(-4.9)^2}\right)} \qquad \text{(Se saca raíz } \sqrt{} \text{ en ambos miembros de la ec.)}$$

$$\Rightarrow \left|t+\frac{30}{2(-4.9)}\right|=\frac{\sqrt{30^2-4(-4.9)(-10)}}{4(-4.9)} \qquad \text{(Se resuelve la ecuación con valor absoluto)}$$

$$\Rightarrow \quad t+\frac{30}{2(-4.9)}=\pm\frac{\sqrt{30^2-4(-4.9)(-10)}}{4(-4.9)} \qquad \text{(Se transpone el término } \frac{b}{2a} \text{ al segundo miembro)}$$

$$\Rightarrow \quad t=\frac{-30}{2(-4.9)}\pm\frac{\sqrt{30^2-4(-4.9)(-10)}}{4(-4.9)}=\frac{-30\pm\sqrt{30^2-4(-4.9)(-10)}}{2(-4.9)} \qquad \text{(Se suma y resta)}$$

De donde: $t_1 = \boxed{}$ y $t_2 = \boxed{}$ Comprobación:

La última expresión del ejemplo anterior, $t=\dfrac{-30\pm\sqrt{30^2-4(-4.9)(-10)}}{2(-4.9)}$, puede también expresarse en términos de los coeficientes $a = -4.9$, $b = 30$ y $c = -10$ de la ecuación cuadrática inicial

$-4.9t^2 + 30t - 10 = 10$, para obtener: $\qquad t=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

¿Cuál crees sería el resultado final si aplicaras este método para la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$?

Apliquemos ahora este método de completar un trinomio cuadrado perfecto a la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. Para ello, primeramente pasamos el término independiente al miembro derecho y dividimos ambos miembros de la ecuación por a y, después, sumamos a cada uno la expresión $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, para transformar el miembro izquierdo en un trinomio cuadrado perfecto factorizable, tal como se muestra a continuación:

$$ax^2+bx+c=0 \;\Rightarrow\; x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a} \;\Rightarrow\; x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \;\Rightarrow\; \left(x+\frac{bx}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Observa que en la expresión $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ se cumple siempre que $4a^2 > 0$, pero $b^2 - 4ac$ (denominado el ***discriminante de la ecuación***) puede ser positivo, cero o negativo. Hagamos $D = b^2 - 4ac$ y consideremos los casos siguientes:

Caso 1: Si $D > 0$, se puede plantear entonces que:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{2a^2} \;\Rightarrow\; \left|x+\frac{bc}{2a}\right|=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \;\Rightarrow\; x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \;\Rightarrow$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \;\Rightarrow\; x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Estas dos soluciones se acostumbran escribir así: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Caso 2: Si $D=0$, se puede plantear entonces que: $x=\dfrac{-b\pm 0}{2a}=-\dfrac{b}{2a}$, es la solución única de la ecuación.

Caso 3: Si $D<0$, se puede plantear entonces que: como el discriminante $D=b^2-4ac$ es un número negativo, entonces no es posible la extracción de su raíz cuadrada en el dominio de los números reales. Por consiguiente, en este caso la ecuación $ax^2+bx+c=0\ \ (a\neq 0)$ no tiene soluciones reales, ya que $\sqrt{D}\notin\Re$.

En resumen, se llama ***fórmula general de resolución de la ecuación de segundo grado*** a la expresión:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Donde: el valor de $D=b^2-4ac$ (el discriminante de la ecuación) determina la naturaleza y número de raíces de la ecuación.

Además, puesto que hemos analizado todos los casos posibles con relación a las raíces de la ecuación cuadrática, podemos plantear el siguiente ***teorema*:**

I) Si $D=b^2-4ac>0$, entonces la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0\ \ (a,b,c,\in\Re,\ a\neq 0)$ tiene dos soluciones reales que son: $x_{1,2}=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

II) Si $D=0$, entonces la ecuación tiene una sola solución: $x_1=-\dfrac{b}{2a}$.

III) Si D <0, entonces la ecuación no tiene soluciones en $\Re$.

Estrategia de resolución para resolver una ecuación cuadrática con la fórmula general

1) Transfórmala, si no lo está, a la forma $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$
2) Identifica y determina los valores de los coeficientes a, b y c.
3) Calcula el discriminante $D=b^2-4ac$.
   3.1) Si $D<0$, entonces no posee soluciones reales y finaliza.
   3.2) Si $D=0$, entonces posee una sola solución: $x_1=-\dfrac{b}{2a}$.
   3.3) Si $D>0$, posee dos soluciones: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ y $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

Ejemplos

Calcula mediante la fórmula general las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2-17x-117=0$.

Resolución: En esta ecuación tenemos que: $a=2$, $b=-17$, $c=-117$.

Y como: $D=b^2-4ac=(-17)^2-4(2)(-117)=289+936=1225>0$, la ecuación tiene dos soluciones distintas, las cuales se obtienen aplicando la fórmula general:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-17)+\sqrt{1225}}{2(2)} = \frac{17+35}{4} = \frac{52}{4} = 13$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-17)-\sqrt{1225}}{2(2)} = \frac{17-35}{4} = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}$$

Comprobación para $x_1 = 13$: $2(13)^2 - 17(13) - 117 = 338 - 221 - 117 = 338 - 338 = 0$

Comprobación para $x_2 = -\frac{9}{2}$: $2\left(-\frac{9}{2}\right)^2 - 17\left(-\frac{9}{2}\right) - 117 = \frac{81}{2} + \frac{153}{2} - 117 = 0$

Por tanto: $x_1 = 13$ y $x_2 = -\frac{9}{2}$ son las soluciones de la ecuación.

b) $x(x+3) - 4 = 5x - 3.$

Resolución: Primeramente hay que transformar la ecuación a la forma general
$x(x+3) - 4 = 5x - 3 \;\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 5x - 3 \;\Rightarrow x^2 + 3x - 4 - 5x + 3 = 0 \;\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

De donde: $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$ y $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-1) = 4 + 4 = 8 > 0$

$$\therefore\ x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2(1)} = \frac{2+\sqrt{8}}{2(1)} \approx \frac{2+2.83}{4} = \frac{4.83}{4} = 2.42$$

$$\therefore\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2(1)} = \frac{2-\sqrt{8}}{2} \approx \frac{2-2.83}{2} \approx \frac{-0.83}{2} \approx -0.42$$

Comprobación para $x_1 \approx 2.42$: $2.42(2.42+3) - 4 \approx 5(2.42) - 3$

$2.42(5.42 - 4 \approx 12.10 - 3$
$13.12 - 4 \approx 9.10$
$9.12 \approx 9.10$

Nota: te sugerimos hagas la comprobación para $x_2 \approx -0.42$

c) $\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{3x}{x-2}$

Resolución: Transformamos primero la ecuación a la forma general ecuación a la forma general

$(x+2)(x-2) = 3x(x+1) \;\Rightarrow x^2 - 4 = 3x^2 + 3x \;\Rightarrow 2x^2 + 3x + 4 = 0$

Donde: $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Y como $D = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(4) = 9 - 32 = -23 < 0$, la ecuación, por tanto, no posee soluciones en el dominio de los números reales.

Se ha visto que no todas las ecuaciones cuadráticas tienen soluciones reales, sin embargo, un resultado interesante es que con un par de números reales cualesquiera, por ejemplo $w_1 \in \Re$ y $w_2 \in \Re$, siempre puede obtenerse una ecuación cuadrática que tiene como soluciones a dichos números. Y la ecuación se puede determinar mediante el producto: $a(x - w_1)(x - w_2) = 0$; donde: $a \in \Re$ y $a \neq 0$. (Por qué)

Ejemplo

Obtener una ecuación cuadrática cuyas soluciones sean $w_1 = 3$ y $w_2 = -4$.

Resolución: $2(x-3)(x-(-4)) = 0 \;\Rightarrow\; (2x-6)(x+4) = 0 \;\Rightarrow\; 2x^2 + 2x - 24 = 0$

Hay que señalar también que existen ecuaciones denominadas de ***forma cuadrática,*** que mediante una transformación algebraica apropiada (que generalmente puede ser un cambio de variable) pueden ser reducidas a cuadráticas y resueltas como tales.

Por ejemplo la ecuación: $(x^2+6)^2-17(x^2+6)+70=0$ es de forma cuadrática ya que con el cambio de variable $x^2+6=y$ puede ser reducida a la cuadrática: $y^2-17y+70=0$, la cual puede ser resuelta de la manera siguiente.

$$y^2-17y+70=0 \;\Rightarrow\; (y-10)(y-7)=0 \;\Rightarrow\; y=10 \quad \text{o} \quad y=7$$
$$\Rightarrow\; x^2+6=10 \quad \text{o} \quad x^2+6=7 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{4}=\pm 2 \quad \text{o} \quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$
$$\Rightarrow\; x_1=2 \;,\; x_2=-2 \;,\; x_3=1 \;,\; x_4=-1.$$

También hay algunas ecuaciones que contienen radicales y en cuyo proceso de resolución aparecen ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo al resolver: $x-\sqrt{x+10}=2$.

Resolución:

$x-\sqrt{x+10}=2$ (*Primero mediante transposición se aísla el radical*)
$\Rightarrow\; x-2=\sqrt{x+10}$ (*Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación*)
$\Rightarrow\; (x-2)^2=(\sqrt{x+10})^2$ (*Se desarrolla el binomio y se elimina la* $\sqrt{\ldots}$)
$\Rightarrow\; x^2-4x+4=x+10$ (*Se transponen los términos al primer miembro y se simplifica*)
$\Rightarrow\; x^2-5x-6=0$ (*Se resuelve la ec. cuadrática...*)
$\Rightarrow\; x_1=-1 \;\; y \;\; x_2=6$ (*Se realiza la comprobación en la ec. cuadrática y en la original*)

Comprobación en la ec. original:

para $x_1=-1$: $-1-\sqrt{-1+10}=-1-3=-4\neq 2 \;;\; \therefore\; x_1$ *no es solución*
para $x_2=6$: $6-\sqrt{6+10}=6-\sqrt{16}=6-4=2 \;;\; \therefore\; x_2$ *sí es solución o raíz de la ec. original*

Por último, hay que mencionar que las ecuaciones cuadráticas también aparecen en la resolución de ***sistemas de ecuaciones no lineales de 2x2*** formadas por una ecuación cuadrática y una ecuación lineal o por dos ecuaciones cuadráticas. O sea, que un sistema de ecuaciones es no lineal, cuando al menos una de sus ecuaciones no es de primer grado. Por ejemplo:

$$x^2+y^2=25$$
$$x+y=7$$

Estos sistemas se suelen resolver por el método de sustitución, que consiste en los siguientes pasos:

Paso 1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones, preferentemente en la de primer grado, así despejando la y obtenemos: $y=7-x$.

Paso 2. Se sustituye el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación: $x^2+(7-x)^2=25$

Paso 3. Se resuelve la ecuación (en este caso cuadrática) resultante:

$$x^2+(7-x)^2=25 \;\Rightarrow\; x^2+49-14x+x^2=25 \;\Rightarrow\; 2x^2-14x+24=0 \;\Rightarrow\; x^2-7x+12=0$$
$$\Rightarrow\; (x-4)(x-3)=0 \;\Rightarrow\; x-4=0 \;\text{o}\; x-3=0 \;\Rightarrow\; x_1=4 \;\text{o}\; x_2=3$$

Paso 4. Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita: $y_1 = 7 - x_1 = 7 - 4 = 3$, $y_2 = 7 - x_2 = 7 - 3 = 4$

Por tanto, las soluciones del sistema son: $(x_1 = 4 , y_1 = 3)$ y $(x_2 = 3, y_2 = 4)$.

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Resuelve las ecuaciones cuadráticas siguientes aplicando el método de completar un trinomio cuadrado perfecto o mediante la fórmula general:

a) $x^2 - 4x + 7 = 0$ b) $2x^2 - 1 = 0$

c) $4x^2 + 3x - 22 = 0$ d) $6x^2 - 13x = 10x - 21$

e) $x^2 + (x + 5)^2 = 5 + 16\,(3 - x)$ f) $3x\,(x - 2) - (x - 6) = 23\,(x - 3)$

g) $(x + 2)^2 = 2x\,(x + 2) - 5$ h) $20x^2 = 14 + 27x$

i) $3x\,(x - 2) - (x - 6) = 23\,(x - 3)$ j) $(x - 8)\,(3x + 9) = (2x - 2)\,(x - 3)$

k) $1000x^2 - 6000x + 7000 = 0$ l) $x = \dfrac{1}{x + 1}$

m) $\dfrac{6}{x^2} - \dfrac{9}{x} = \dfrac{4}{3}$ n) $\dfrac{1}{x + 3} - 2 = \dfrac{2}{x - 6}$

ñ) $\dfrac{3}{x - 2} + 2 = \dfrac{14}{x + 2} + \dfrac{21}{x^2 - 4}$ o) $\dfrac{x + 2}{x} + \dfrac{x - 1}{x - 2} = \dfrac{x - 4}{x^2 - 4}$

p) $\dfrac{6x}{x - 1} - \dfrac{11x}{x + 1} = \dfrac{17x - 5}{x^2 - 1} - 5$ q) $\dfrac{x + 3}{10x} = \dfrac{3x - 1}{40x} + \dfrac{x - 21}{20x^2} + \dfrac{x + 7}{8x}$

r) $\dfrac{x}{x - 2} + \dfrac{2}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{3}{x - 3}$ s) $\dfrac{5}{x - 2} + \dfrac{x - 6}{(x - 2)^2} = 2$

A2) Determina las raíces de las siguientes ecuaciones reducibles a cuadráticas:

a) $4(x^2 - x)^2 - 11\,(x^2 - x) + 6 = 0$ b) $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ c) $16x^4 - 65x^2 + 4 = 0$

d) $(y^2 - 4y)^2 + 2(y^2 - 4y) = 3$ e) $8x - 2 = 10\,x{-1} + 3$ f) $\sqrt{x + 10} - x + 2 = 0$

g) $\dfrac{x + 2}{x - 2} = 3 + 4\left(\dfrac{x - 2}{x + 2}\right)$ h) $\sqrt{2x + 7} + \sqrt{3x + 10} = 2$ i) $\sqrt{3x + 6} - \sqrt{x - 4} = \sqrt{2}$

A3) Aplicando la fórmula general de resolución de la ecuación de segundo grado factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 24x + 143$ b) $5x^2 + 41x + 8$ c) $12x^2 + 5x - 2$ d) $6x^2 + 7x - 10$

A4) (a) ¿Para qué valores de a tiene la ecuación $x^2 + 3x + a = 0$ exactamente una solución? y ¿Para qué valores de a no tiene ninguna solución en los números reales? y (b) ¿Para qué valores de k la ecuación $x^2 + kx + k = 0$ tendrá solución única?

A5) Demostrar que si x_1 y x_2 son raíces de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, entonces:

i) $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ y $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ ii) $x - (x_1 + x_2)\,x + (x_1 \times x_2) = 0$

A6) La suma y el producto de las raíces de una ecuación cuadrática son respectivamente igual a 4/3 y –7/3. Determinar la ecuación cuadrática.

A7) Escribe una ecuación cuadrática que posea las soluciones dadas en cada inciso:

a) $w_1 = 1$ y $w_2 = -3$ b) $w_1 = 0$ y $w_2 = -3$ c) $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{3}$ d) $x_1 = x_2 = 2$

A8) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 100 = 0 \\ x + y + 20 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

Despeje de variables en fórmulas con términos cuadráticos

En la resolución de problemas de Física, Ingeniería o Matemáticas en ocasiones necesitamos despejar alguna de las variables que aparecen en fórmulas. Por esta razón, aunque anteriormente has realizado despejes en fórmulas donde la variable a despejar aparece con exponente 1; aquí aprenderás a despejar variables que pueden aparecer también con exponente 2.

Ejemplos

Realiza lo siguiente:

a) De la fórmula para el tiro vertical $y = V_0 t - \frac{gt^2}{2}$, despejar *t*.

Resolución: Observa que para despejar *t*, se debe considerar la fórmula como una ecuación cuadrática completa donde *t* es la incógnita a determinar que puede obtenerse con la fórmula general tal como se ilustra a continuación.

$$y = V_0 t - \frac{gt^2}{2} \iff \frac{gt^2}{2} - V_0 t + y = 0 \text{ donde: } a = \frac{g}{2}, b = -V_0 \text{ y } c = y$$

$$\therefore\ t = \frac{-(-V_0) \pm \sqrt{(-V_0)^2 - 4\left(\frac{g}{2}\right)(y)}}{2\left(\frac{g}{2}\right)} = \frac{V_0 \pm \sqrt{V_0^2 - 2g \cdot y}}{g}$$

De este modelo también se puede calcular el tiempo t $(t > 0)$ que tarda un cuerpo en caída libre para caer una distancia y. En este caso puede considerarse que $V_0 = 0$, por lo cual el tiempo t quedará determinado por:

$$t = \frac{V_0 \pm \sqrt{V_0^2 - 2g \cdot y}}{g} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 2g \cdot y}}{g} = \pm \frac{\sqrt{-2g \cdot y}}{g} = \pm \sqrt{\frac{-2y}{g}}$$

Este resultado también se puede obtener con un simple despeje si se parte de la fórmula original:

$$y = V_0 t - \frac{gt^2}{2} = (0)t - \frac{gt^2}{2} = -\frac{gt^2}{2} \Rightarrow 2y = -gt^2 \Rightarrow t^2 = \frac{-2y}{g} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{-2y}{g}}$$

b) De la fórmula para calcular el volumen (V) de un cono: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Calcular el valor de r si $h = 9$ dm y $V = 37.7$ dm^3

Resolución: Primeramente se despeja r de la fórmula y después se sustituyen los valores de las variables que se dan como datos

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad \frac{3V}{h\pi} = r^2 \quad (\text{como } r>0) \quad \Rightarrow \quad = r\sqrt{\frac{3V}{h\pi}} = \sqrt{\frac{3\times 37.7}{9\times 3.14}} = \sqrt{\frac{113.1}{28.27}} \approx \sqrt{4} = 2\text{ dm}$$

Actividades de aprendizaje

A1) Despeja en cada inciso las variables que se indican:

a) $A = \pi r^2 \quad (r)$ b) $V = \pi r^2 h \quad (r, h)$ c) $c^2 = a^2 + b^2 \quad (c, a)$

d) $E_c = \frac{1}{2} mv^2 \quad (v)$ e) $s = \frac{1}{2} at^2 \quad (t)$

A2) Despeja en cada inciso la variable que se indica y calcula su valor para los datos dados:

i) $3V = a^2 h \quad (a)$ si $V = 15.4$; $h = 2.1$ ii) $s = \pi(R^2 - r^2) \quad (R)$ si $s = \pi$; $r = 2.5$

iii) $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad (b)$ si $d = 6$; $a = 2$; $c = 3$ iv) $A = 4\pi r^2 \quad (r)$ si $A = 6.28$

Aplicaciones de las ecuaciones cuadráticas y de los modelos cuadráticos

En este apartado resolverás problemas que conducen al planteo y resolución de ecuaciones cuadráticas o de modelos matemáticos cuadráticos. Las relaciones entre dos (o más) variables donde, por lo menos, una de las variables es de segundo grado es llamada modelos cuadráticos. A continuación resolveremos como ejemplos ilustrativos algunos problemas de física, economía, ingeniería y matemáticas.

Ejemplo

Un modelo cuadrático es la fórmula: $y = y_0 + V_0 t - \frac{gt^2}{2}$

utilizada en Física para determinar la posición y, después de un cierto tiempo t, de un cuerpo que se lanza en un tiro vertical desde una posición y_0 con una velocidad inicial V_0.

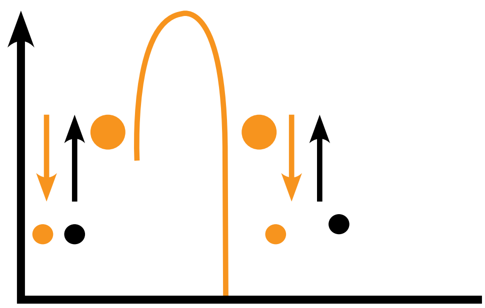
Así, si la altura que alcanza una pelota que se arroja verticalmente hacia arriba está dada por el modelo matemático (o función): $y = -4.9\,t^2 + 60t + 15$, donde y se mide en metros y t en segundos.

Entonces, los tiempos para que la pelota se encuentre en las posiciones $y = 15$, $y = 20$ y $y = 0$ pueden ser calculados respectivamente resolviendo las ecuaciones cuadráticas:

$$-4.9\,t^2 + 60t + 15 = 15 \quad ; \quad -4.9\,t^2 + 60t + 15 = 20$$

$$\text{y} \quad -4.9\,t^2 + 60t + 15 = 0.$$

¿En qué tiempo alcanzará la pelota la altura máxima? y ¿Cuál será la altura máxima alcanzada?



Antes de continuar con la formulación y resolución de problemas es conveniente recordar el Plan General Heurístico de Polya cuyas fases proponen que:

PARA RESOLVER PROBLEMAS DEBES

1. ***Comprender el problema:*** Lee cuidadosamente el problema para comprender perfectamente la situación que se plantea, determinando la información relevante que te proporcionará los datos y las incógnitas.
2. ***Elaborar un plan de resolución:*** Define las operaciones y selecciona las estrategias pertinentes para el proceso de resolución. Busca en el problema las relaciones o combinaciones existentes que te permitan formular y resolver la ecuación que representa matemáticamente a dicho problema. En caso de que exista una sola incógnita identifícala con una sola letra, generalmente ***x***. En caso de que exista más de una, elige de manera conveniente la que se va a representar mediante ***x***, y expresa las otras cantidades desconocidas en términos de la misma.
3. ***Desarrollar el plan de resolución:*** Desarrolla la estrategia seleccionada realizando las operaciones necesarias. Trabaja la estrategia con determinación y no la abandones a la primera dificultad, sin embargo, si valoras que las cosas se están complicando demasiado en lugar de acercarte a una posible solución, vuelve al paso anterior y selecciona y experimenta una estrategia diferente. Recuerda que generalmente existe más de una vía de solución y unas son más complicadas que otras, tal vez en tus intentos fallidos no seleccionaste las más conveniente o sencilla. Por esta razón debes seguir probando hasta que encuentres el camino…
4. ***Evaluar los resultados y dar respuesta al problema:*** Comprueba la solución obtenida directamente en el enunciado del problema (nunca en la ecuación) y da las respuestas atendiendo a lo que se pide en el enunciado y preguntas del problema.

Ejemplo | Un tren ha recorrido 200 km en cierto tiempo. Para haber recorrido esa distancia en 1 hora menos, la velocidad debía haber sido 10 km/h más. Calcula la velocidad del tren.

Resolución: Sabemos que: d (distancia) = v (velocidad) · t (tiempo), y como dato conocemos que $d = 200$ km, por tanto, $200 = v_1 \times t_1$ (Ec.1)

Si la velocidad aumenta en 10 km/h, tenemos: $v_2 = v_1 + 10$; entonces el tiempo recorrido es 1 hora menos: $t_2 = t_1 - 1$, la distancia recorrida queda ahora así:

$$200 = (v_1 + 10)(t_1 - 1) \text{(Ec. 2)}$$

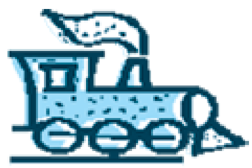
Despejando t_1 de la ecuación (1) y sustituyéndola en la ecuación (2):

$200 = (v_1 + 10)\,[(200/v_1) - 1]$ (multiplicando y simplificando)

$\Rightarrow v_1^2 + 10v_1 - 2000 = 0$ (Factorizando)

$\Rightarrow (v_1 + 50)\,(v_1 - 40) = 0$ (Resolviendo)

$\Rightarrow v_1 = -50 \quad \text{o} \quad v_1 = 40$



Se descarta el valor negativo, pues no tiene sentido en el contexto del problema.

Comprobación: De la (Ec.1); $200 = v_1 \times t_1 \quad \Rightarrow t_1 = \frac{200}{40} = 5$ horas. Sustituyendo en la (Ec. 2); $V_1 = 40\ km/h$ y $t_1 = 5$ horas: $200 = (40 + 10)(5 - 1) = (50)(4)$. Por tanto **(Respuesta):** La velocidad del tren es 40 km/h.

Ejemplo

La longitud de una etapa en un evento ciclístico es igual a 210 km. El ciclista A corre con una velocidad promedio, que es menor en 2 km/h que la del ciclista B. Si A necesita 15 min. más que B para recorrer la distancia de esta etapa. ¿Con qué velocidad corren A y B?

Resolución:

Sea x la velocidad del ciclista A, utilizando la relación $v = \dfrac{\Delta S}{t}$ de la cual se obtiene $t = \dfrac{\Delta S}{t}$ podemos resumir los datos en la siguiente tabla:

Ciclista	ΔS	v	t
A	210	x	$\dfrac{210}{x}$
B	210	$x+2$	$\dfrac{210}{x+2}$

Como el ciclista A necesita 15 minutos (es decir, ¼ de hora) más que el B para llegar a la meta podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\frac{210}{x} = \frac{210}{x+2} + \frac{1}{4}$$

Como la ecuación es fraccionaria, se multiplican ambos miembros de la misma por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $4x(x+2)$, obteniéndose:

$$4(210)(x+2) = 4\,(210x) + x(x+2) \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 1680 = 0$$

$$\Rightarrow \ (x+42)(x-40) = 0 \quad \Rightarrow x + 42 = 0 \quad \text{o} \quad x - 40 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -42 \quad \text{o} \quad x_2 = 40$$

Como la solución negativa no tiene sentido en este problema, consideramos como posible respuesta 40 km/h y $(40 + 2)$ km/h = 42 km/h.

Comprobación: Calculemos los tiempos empleados por A y B, es decir,

$$t_A = \frac{210}{40} = \frac{21}{4} \quad y \quad t_B = \frac{210}{42} = 5, \text{ luego: } t_A + t_B = \frac{21}{4} - 5 = \frac{1}{4} \text{ h} = 15 \text{ min.}$$

Por tanto: <u>La velocidad del ciclista A es 40 km/h y la del ciclista B, 42 km/h.</u>

Ejemplo

Se tiene un terreno rectangular cuyo fondo es el doble de su frente, se divide este terreno en dos partes mediante un cerco situado a 30 m del frente y paralelo a éste. Si la parte trasera del terreno tiene un área de 3500 m², calcular las dimensiones del terreno.

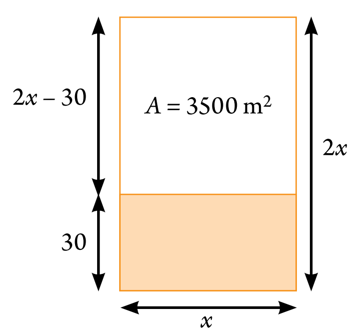
Resolución: Sean

x: longitud del frente

$2x$: longitud del fondo

$2x - 30$: longitud fondo parte trasera

x: longitud frente parte trasera



Como el área de la parte trasera es 3500 m² tenemos:

$$x\,(2x - 30) = 3500 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 15x - 1750 = 0$$

Aplicando la fórmula general obtenemos que: $x_1 = 50$, $x_2 = -35$. De donde, se descarta el valor negativo (no tiene sentido), luego $x = 50$ ¡Compruébelo! Por tanto: La longitud del frente es 50 m y la longitud del fondo 100 m.

Ejemplo | El largo de un terreno rectangular es el doble del ancho. Si el largo se aumenta en 40 m y el ancho en 6 m, el área se duplica. Calcula las dimensiones del terreno.

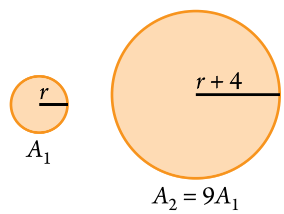
Resolución: Sea x el ancho del terreno, entonces, $2x$ será el largo del terreno, y por tanto, el área del terreno es: $x \times 2x = 2x^2$. Aumentando el largo en 40 m, este sería $(2x + 40)$ m, y aumentando el ancho en 6 m este sería $(x + 6)$ m. Por tanto, el área ahora sería: $(2x + 40)(x + 6)$. Pero según las condiciones del problema esta nueva área es el doble de la anterior, $2x^2$; luego, tenemos la ecuación:

$$
\begin{aligned}
(2x + 40)(x + 6) &= 2(2x^2) && \text{(Efectuando los productos)}\\
2x^2 + 52x + 240 &= 4x^2 && \text{(Trasponiendo y reduciendo)}\\
-2x^2 + 52x + 240 &= 0 && \text{(Simplificando la ecuación)}\\
x^2 - 26x - 120 &= 0 && \text{(factorizando la ecuación)}\\
(x - 30)(x + 4) &= 0 &&\\
x - 30 = 0 \quad \text{o} \quad x + 4 &= 0 && \Rightarrow \quad x_1 = 30 \quad \text{o} \quad x_2 = -4
\end{aligned}
$$

Como la solución $x_2 = -4$ no satisface las condiciones del problema, luego **(respuesta)** el ancho del terreno es de 30 m y el largo 60 m.

Comprobación: El área del rectángulo original es $(30\text{m})(60\text{m}) = 1800\ \text{m}^2$, y el área del rectángulo transformado es: $(30\text{m} + 6\text{m})(60\text{m} + 40\text{m}) = 3600\ \text{m}^2 = 2(1800\ \text{m}^2)$.

Ejemplo | Si el radio de un círculo se incrementa en 4 unidades, entonces el área resulta multiplicada por 9. Calcular el radio original.



Resolución: La fórmula del área del círculo es $A = \pi r^2$, de donde

$A_1 = \pi r^2 \quad ; \quad A_2 = \pi(r + 4)^2 \quad y \quad A_2 = 9A_1$

$\Rightarrow \pi(r + 4)^2 = 9(\pi r^2) \quad \Rightarrow \pi(r^2 + 8r + 16) = 9\pi r^2$

$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow (r - 2)(r + 1) = 0 \quad \Rightarrow r_1 = 2 \quad \text{o} \quad r_2 = -1$

Se descarta el valor negativo, pues no tiene sentido una distancia negativa.

Comprobación: $A_1 = \pi(2)^2 = 4\pi, \quad A = \pi(2 + 4)^2 = 36\pi$, de donde: $A_2 = 9A_1$

Respuesta: El radio original del círculo es igual a 2 unidades.

Ejemplo | Determinar x para que $x - 1, x + 1, 2(x + 1)$ estén en progresión geométrica.

Resolución: recordemos que el enésimo término de una progresión geométrica viene dado por la expresión $a_n = a_1 r^{-1}$, de donde si hacemos $a_1 = x - 1$, $a_2 = x + 1$ y $a_3 = 2(x + 1)$. Entonces:

$$a_2 = a_1 r^{2-1} \qquad \text{y} \qquad a_3 = a_1 r^{3-1}$$

$$a_2 = a_1 r^{2-1} \quad \Rightarrow r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{x+1}{x-1} \quad ; \quad a_3 = a_1 r^{3-1} \quad \Rightarrow 2(x+1) = (x-1)\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \frac{(x+1)^2}{x-1}$$

$\Rightarrow 2(x + 1)(x - 1) = (x + 1)^2 \quad \Rightarrow 2x^2 - 2 = x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 3 \quad y \quad x_2 = -1$

Por tanto, para $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$, se forman respectivamente las progresiones geométricas:

$$3 - 1 = 2, \quad 3 + 1 = 4, \quad 2(3 + 1) = 8 \quad \text{y} \quad -1 - 1 = -2, \quad -1 + 1 = 0, \quad 2(-1 + 1) = 0$$

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Dos turistas se dirigen simultáneamente a una ciudad que se encuentra a una distancia de 30 km de ellos. El primero recorre por hora, 1 km más que el segundo, por lo que llega a la ciudad 1 h antes. ¿Cuántos km/h recorre cada turista?

A2) Un automóvil recorre 1 000 km, pero si aumentara la velocidad en 10 km/h tardaría 5 h menos en recorrer los 1 000 km. Calcula su velocidad original.

A3) Dos móviles salen al mismo tiempo del mismo punto en dirección a una ciudad que dista 90 km del lugar de partida. La velocidad del primero es 3 km/h mayor que la del segundo y llega a la ciudad una hora antes que éste. ¿Cuál es la velocidad de cada móvil?

A4) Un hombre remó 3 km río abajo y regresó al lugar de partida invirtiendo en total de 2 h. la velocidad de la corriente era de 2 km/h. Halla la velocidad con que rema en aguas tranquilas.

A5) Un automovilista recorre 240 km a velocidad constante; si la velocidad hubiera sido de 5 km/h menos, hubiera empleado 12 minutos más en su recorrido. ¿Cuál fue su velocidad?

A6) Dos brigadas juntas realizan un trabajo en 10 h. Para este trabajo la primera brigada sola necesita dos horas menos que la segunda. ¿En qué tiempo podrá cada una de las brigadas por separado realizar el trabajo?

A7) Dos llaves juntas llenan una piscina en 2 horas. La primera llave lo hace por sí sola en 3 horas menos que la segunda. ¿Cuántas horas tarda cada una por separado para llenar la piscina?

A8) El área de una lámina de acero de forma rectangular es 48 cm^2 y su largo es 4/3 de su ancho. Halla las dimensiones de la lámina.

A9) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 cm, un cateto es 5 cm más largo que el otro. Calcula las longitudes de los catetos.

A10) El perímetro de un triángulo rectángulo es 24 cm y la hipotenusa mide 10 cm. Calcula su área.

A11) Un lado de un rectángulo es 7 cm más largo que el otro. La diagonal es 1 cm mayor que el lado más largo. Halla el área del rectángulo.

A12) Los catetos de un triángulo rectángulo están en la razón 8/15 y la hipotenusa mide 6.8 cm. Calcula el área del triángulo.

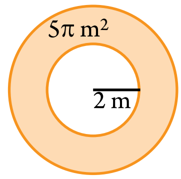
A13) Con una pieza de zinc de forma rectangular con 4 cm más de largo que de ancho se construye una caja de 840 cm^3 de capacidad cortando un cuadrado de 6 cm de lado de cada esquina y doblando los bordes. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?

A14) Un jardín de forma rectangular tiene 2 700 m^2 de superficie y un perímetro de 210 m. ¿Cuáles son las dimensiones del jardín?

A15) El piso de una habitación tiene 1 500 mosaicos (cuadrados). Si cada mosaico tuviese 5 cm más de largo y 5 cm más de ancho bastarían 960 mosaicos para recubrir el piso. Halla las dimensiones de los mosaicos.

A16) A un cuadro rectangular de 1.5 m de largo por 90 cm de ancho se le pone un marco de ancho constante. Si el área total del cuadro y el marco es de 1.6 m^2, ¿cuál es el ancho del marco?

A17) Una fuente de un parque tiene un paseo circular a su alrededor de área 5π m^2 como se ilustra en la figura. Si el radio de la fuente es de 2 m, ¿cuál es la longitud del radio exterior?



A18) Descompón el número 124 en tres sumandos que formen progresión geométrica, siendo 96 la diferencia entre el mayor y el menor.

A19) La suma de los ocho primeros términos de una progresión geométrica es 17 veces la suma de los cuatro primeros. Halla el valor de la razón.

A20) Tres números están en progresión geométrica; el segundo es 32 unidades mayor que el primero, y el tercero, 96 unidades mayor que el segundo. Halla los números.

A20) Halla los cuatro primeros términos de una progresión geométrica, sabiendo que el segundo es 20 y la suma de los cuatro primeros es 425.

A21) Halla los ángulos de un cuadrilátero, si se sabe que están en progresión geométrica y que el mayor es 27 veces el menor.

A22) Divide el número 221 en tres partes enteras que forman una progresión geométrica tal que el tercer término sobrepasa al primero en 136.

A23) La suma de tres números en progresión geométrica es 248 y la diferencia entre los extremos 192. Halla dichos números.

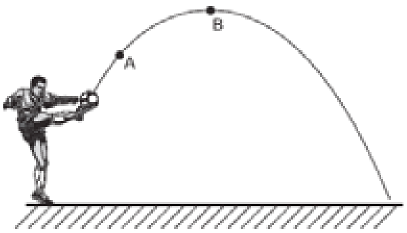
A24) A una cuerda de 700 m de longitud se le dan dos cortes, de modo que uno de los trozos extremos tiene una longitud de 100 m. Sabiendo que las longitudes de los trozos están en progresión geométrica, determina la longitud de cada trozo.

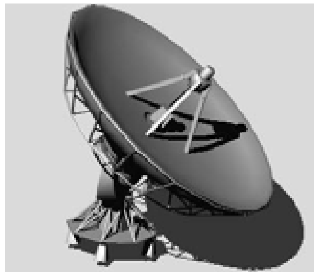
A25) Tres números cuya suma es 36 están en progresión aritmética. Halla dichos números sabiendo que si se les suma 1, 4 y 43, respectivamente, los resultados forman una progresión geométrica.

A26) En un torneo de ajedrez cada maestro juega una vez con cada uno de los restantes. Si en total se juegan 45 partidas, ¿cuántos jugadores toman parte en el torneo?

4.2 Funciones cuadráticas

En la primera unidad de este curso estudiaste las funciones y modelos lineales $f(x) = mx + n$. Ahora estudiarás las ***funciones cuadráticas*** las cuales son de interés no sólo en matemáticas sino también en física, ingeniería y en otras áreas del conocimiento. Por ejemplo, al estudiar la trayectoria de una pelota lanzada al aire con una cierta velocidad inicial o durante el diseño y la construcción de puentes colgantes, antenas parabólicas, hornos solares y focos para automóviles y, en biología, para estudiar los efectos nutricionales de los organismos.





Concepto y definición de función cuadrática

La relación matemática que a cada $x \in \Re$ le hace corresponder el número real $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, donde a, b y c son números reales dados, se denomina **función cuadrática o de segundo grado.**

Así, las relaciones matemáticas siguientes son ejemplos de funciones cuadráticas:

$y = -2x^2 - 5x + 4$ (donde: $a = -2$; $b = -5$; $c = 4$)
$y = 3x^2 - 0.5\,x$ (donde: $a = 3$; $b = -0.5$; $c = 0$)
$y = -x^2 + 3$ (donde: $a = -1$; $b = 0$; $c = 3$)
$y = x^2$ (donde: $a = 1$; $b = c = 0$)

De donde, se puede observar que una ecuación cuadrática puede ser originada desde una función cuadrática. Así, la ecuación cuadrática $2x^2 - 3x - 1 = 0$, se origina de la función cuadrática $y = 2x^2 - 3x - 1$, ya que se obtiene de esta cuando $y = 0$.

El dominio de toda función cuadrática (o los valores permitidos de la variable independiente x, si es que no se ponen restricciones) es el conjunto de los números reales, pues las operaciones que intervienen en la expresión $ax^2 + bx + c$ están definidas para todos los números reales. Mientras que, el conjunto imagen de la función (o conjunto de valores que toma la variable dependiente y) se limitan a un subconjunto del conjunto $\Re$.

Las funciones cuadráticas aparecen en la resolución de una gran variedad de problemas. Como por ejemplo: Si un chisme se propaga en una población de 100 personas a una velocidad (y) que es directamente proporcional al producto del número de los ya enterados con el número de los que no lo están. ¿En qué momento el chisme se propaga más rápido?

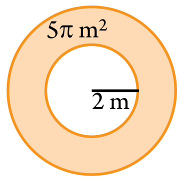
Resolución: Sea x el número de personas enteradas, por tanto, $100 - x$ será el número de personas no enteradas. De donde, se obtiene la función cuadrática (o el modelo cuadrático) siguiente $y = kx(100 - x) = -kx^2 + 100kx$, donde $k > 0$. El cual puede ser evaluado para diferentes valores de x:

Valor de y para $x = 1$: $y = f(1) = -k(1)^2 + 100k(1) = 99k$
Valor de y para $x = 10$: $y = f(10) = -k(10)^2 + 100k(10) = 900k$
Valor de y para $x = 40$: $y = f(40) = -k(40)^2 + 100k(40) = 2400k$
Valor de y para $x = 50$: $y = f(50) = -k(50)^2 + 100k(50) = 2500k$
Valor de y para $x = 60$: $y = f(60) = -k(60)^2 + 100k(60) = 2400k$
Valor de y para $x = 80$: $y = f(80) = -k(80)^2 + 100k(80) = 1600k$
Valor de y para $x = 100$: $y = f(100) = -k(100)^2 + 100k(100) = 0$

De donde se observa que para $x = 50$ el chisme se propaga con la mayor velocidad que es $y = f(50) = 2500k$. ***¿Será esta velocidad realmente la mayor de todas las posibles?***

Otros ejemplos: la tabla siguiente muestra la correspondencia entre las longitudes de los lados de diez cuadrados y sus correspondientes áreas.

Lado: a cm	1	1.5	2	2.3	3	3.6	4	5	5.5	6
Área: A cm²	1	2.3	4	5.3	9	13	16	25	30.3	36



En general, esta relación de correspondencia está dada por la función cuadrática $y = x^2$, que también puede ser escrita como $f(x) = x^2$, donde $y = f(x)$.

Esta última notación (que se lee: "**y igual a *f* de *x***") resulta muy conveniente cuando se quiere especificar un valor de y para un valor particular de x, por ejemplo, $y = f(5.5) = 30.3$.

También, la relación mediante la cual a cada círculo de radio r (con $r \in \Re$ y $r > 0$) se le hace corresponder su área (A) define una función cuadrática, pues la **imagen *A*** para cada r viene dada por:

$$A = \pi r^2 \quad \text{o} \quad A(r) = \pi r^2.$$

De igual manera, la relación entre la longitud del lado de una piscina y su volumen es una función porque a cada valor del lado le corresponde un único valor del volumen.

Así pues, cuando se encuentran funciones cuadráticas en situaciones problemáticas, muchas de las preguntas más importantes, se pueden responder, resolviendo ecuaciones o desigualdades relacionadas con dichas funciones. Por ejemplo si en una fiesta escolar, la función que relaciona el precio (x) del boleto con las ganancias $G(x)$, en pesos, es:

$G(x) = -10x2 + 800x - 7000$

¿Para qué precio de boleto la ganancia es de $6,000? Esta pregunta es equivalente a resolver la ecuación:

$G(x) = 6000$; o bien, $-10x^2 + 800x - 7000 = 6000$

¿Qué precios de boleto dan por resultado que no se pierda dinero? En otras palabras, que den una ganancia de al menos \$0. Que es equivalente a resolver la inecuación:

$$G(x) \geq 0; \text{ o bien, } -10x^2 + 800x - 7000 \geq 0.$$

O también, cuando un conductor de automóvil se pregunta "¿cuántos metros necesitaré para detenerme si me encuentro con un problema enfrente?" La respuesta depende de muchas variables. Sin embargo, para un carro de unos 1500 kg de peso, que viaja sobre una carretera plana sin inclinación sobre asfalto seco, se puede usar la función cuadrática:

$$d(v) = 0.005v^2 + 0.14v$$

para predecir $d(v)$, la distancia de frenado en metros, a partir de una velocidad v en kilómetros por hora.

Así, si estás conduciendo a una velocidad de 60 km/h sobre una carretera de asfalto seco, cuando ves un camión atravesado que está bloqueando la carretera y frenas tan rápido como te es posible, puedes esperar avanzar 26.5 metros desde el momento en que metiste los frenos hasta que te detuviste, como muestran los siguientes cálculos.

$$d(60) = 0.005(60)^2 + 0.14(60) = 0.005(3600) + 0.14(60) = 18 + 8.5 = 26.5$$

En la función cuadrática para distancia de frenado, el término lineal $0.14v$ da cuenta de la distancia de reacción de una persona, consecuencia del tiempo promedio que le toma antes de aplicar los frenos. De esta manera cuando frenas de repente viajando a 60 kilómetros por hora, recorrerías $0.14(60) = 8.5$ metros más antes de aplicar los frenos.

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Determina cuáles de las funciones siguientes son cuadráticas y cuáles no. Fundamenta tu respuesta.

a) $y = x^2$ b) $y = -9x^2 + 0.5$ c) $y = \sqrt{x} + x + 4$

d) $y = 2x^2 + 3x$ e) $y = x + 2.8$ f) $y = x^{-2} - 3x - 1$

A2) En base a la función $d(v) = 0.005v^2 + 0.14v$ para predecir, la distancia de frenado $d(v)$ en metros, a partir de una velocidad v en kilómetros por hora, contesta las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es la distancia de frenado para un carro que viaja a 40 km/h?

b) ¿Qué velocidad requiere exactamente 25 metros de frenado?

c) ¿Cuál es la distancia de frenado para una velocidad de 160 km/h?

d) ¿Cuál es la distancia de frenado para una velocidad de 0 kilómetros por hora?

e) ¿Qué velocidad (velocidades) permiten a un carro frenar en menos de 80 m?

f) Un carro frenó en 100 metros. ¿Qué tan rápido iba?

g) ¿Cuáles son las distancias de frenado para velocidades mayores de 90 km/h?

h) Si frenas de repente viajando a 100 kilómetros por hora, ¿cuántos metros recorrerías antes de aplicar los frenos?

j) Para la regla de la función distancia de frenado dada arriba, y usando incrementos de 10 km/h para la velocidad, genera y registra una tabla de pares de valores $(v, d(v))$. Además usa los datos de tu tabla para hacer una gráfica de $d(v)$ en unos ejes coordenados.

A3) Se estudiaron los efectos nutricionales sobre ratas que fueron alimentadas con una dieta que contenía un 10% de proteína. La proteína consistía en levadura y harina de maíz. Variando el porcentaje p de levadura en la mezcla de proteína, se estimó que el peso promedio ganado (en gramos) de una rata en un período fue de $f(p)$, donde:

$f(p) = -\frac{1}{50}p^2 + 2p + 20 \quad ; \quad 0 \leq p \leq 100$. Encuentre el máximo peso ganado variando el porcentaje p de levadura.

A4) Si el número de turistas que hace un recorrido en autobús a una ciudad es exactamente 30, una empresa cobra $800.00 por persona. Por cada persona adicional a las 30, se reduce el cobro personal en $15.00. ¿Cuál es el número de turistas que debe llevar un autobús (con asientos limitados) para maximizar los ingresos de la empresa?

A5) En la década de 1940 se realizaba con regularidad el acto de la bala humana en el circo. La boca del cañón estaba a 1m del suelo y la distancia horizontal total que recorría era de 175m. Cuando el cañón se apunta a un ángulo de 45º, la ecuación del tiro parabólico tiene la forma $y = ax^2 + x + c$, donde x representa la distancia horizontal recorrida y y la distancia vertical. Determina una ecuación que describa el vuelo, y a partir de ella encuentra la altura máxima alcanzada por la bala humana.

La función cuadrática: $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Analicemos la función cuadrática particular $y = x^2$ $(a \neq 0)$; y consideremos el caso cuando $a = 1$,

es decir, $y = x^2$.

El gráfico de esta función se obtiene representando en un sistema de coordenadas rectangulares todos los puntos cuyas coordenadas están determinadas por la ecuación $y = x^2$, como no es posible representarlos todos, determinemos las coordenadas de algunos puntos y representémoslos (figura 1).

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
x^2	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4

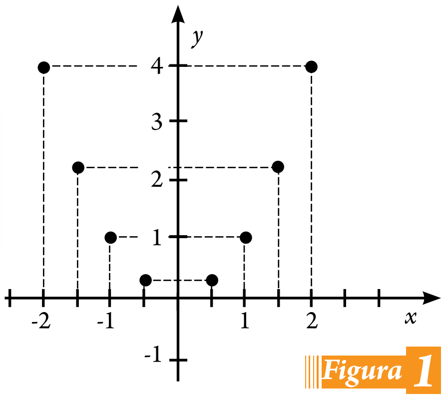


Figura 1

Observa en la figura 1 que los puntos representados no quedan contenidos en una línea recta, ni en una poligonal abierta, pues si determinamos las coordenadas de otros puntos estos quedarían fuera de la poligonal como se ilustra en la figura 2.

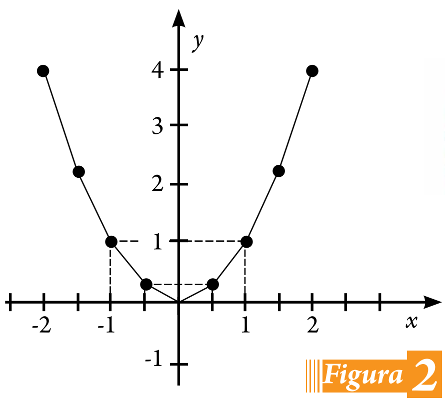


Figura 2

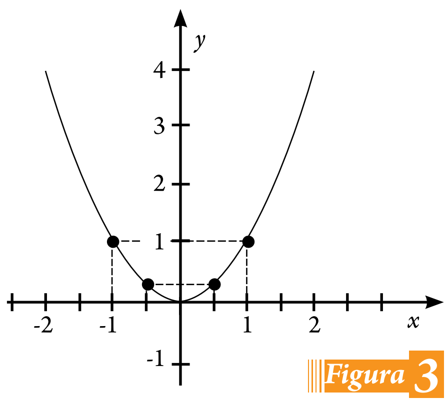


Figura 3

Comprenderás que mientras más puntos representemos más nos aproximamos a la forma del gráfico de la función $y = x^2$. El gráfico de esta función es una línea curva que se obtiene uniendo los puntos representados como se ilustra en la figura 3. Dicha curva se denomina **parábola.**

Del gráfico de la figura 3 podemos observar las siguientes propiedades de la función $y = x^2$:

1) Dominio: $x \in \Re$
2) Imagen: $y \in \Re$; $y \geq 0$
3) Ceros: $x_1 = 0$
4) Valor mínimo de la función $(y = 0)$, lo alcanza para $x = 0$, el punto $V(0{,}0)$ se denomina vértice de la parábola.
5) La gráfica es simétrica respecto al eje y (recta $x = 0$), porque argumentos opuestos tienen imágenes iguales, la recta $x = 0$ se denomina eje de la parábola.
6) Para $x \leq 0$. al aumentar los valores de x disminuyen las imágenes; para $x \geq 0$. al aumentar los valores de x aumentan las imágenes, se dice entonces que: para $x \leq 0$ la función es **monótona decreciente,** y para $x \geq 0$ la función es **monótona creciente.**

Ejemplo

Representa gráficamente las funciones siguientes y analiza sus principales propiedades:

a) $y = 2x^2$ b) $y = \frac{1}{2}x^2$ c) $y = -x^2$

Resolución: Confeccionamos una tabla de valores para cada función, representamos los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares y los unimos mediante una parábola (figura 4).

a) $y = 2x^2$

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$2x^2$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8

b) $y = \frac{1}{2}x^2$

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$\frac{1}{2}x^2$	2	1.125	0.5	0.125	0	0.125	0.5	1.125	2

c) $y = -x^2$

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$-x^2$	−4	−2.25	−1	−0.25	0	−0.25	−1	−2.25	−4

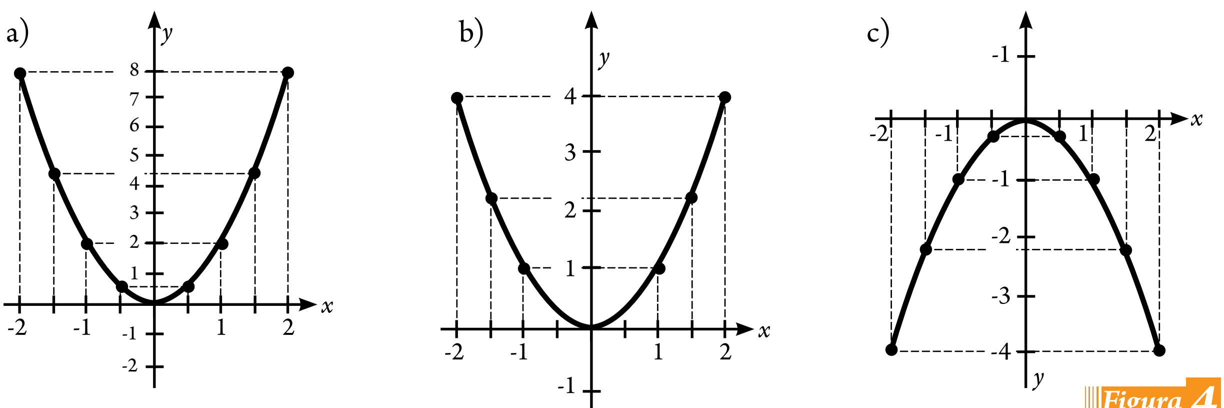


Figura 4

Observando los gráficos podemos concluir que para:

a) $y = 2x^2$ b) $y = \frac{1}{2}x^2$ c) $y = -x^2$

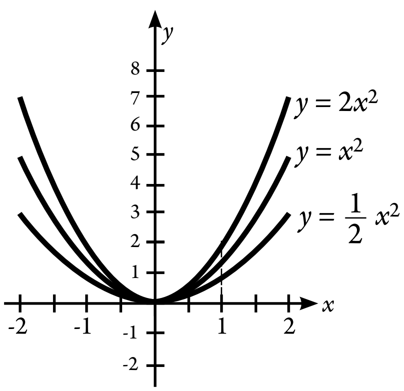
1) Dominio: $x \in \Re$
2) Imagen: $y \in \Re; y \geq 0$
3) Ceros: $x_1 = 0$
4) Valor mínimo: $y = 0$
5) Vértice: $V(0,0)$
6) Eje de simetría: $x = 0$ (eje y)
7) Monotonía:
   para $x \leq 0$ decreciente,
   para $x \geq 0$ creciente.

1) Dominio: $x \in \Re$
2) Imagen: $y \in \Re ; y \leq 0$
3) Ceros: $x_1 = 0$
4) Valor máximo: $y = 0$
5) Vértice: $V(0,0)$
6) Eje de simetría: $x = 0$ (eje y)
7) Monotonía:
   para $x \leq 0$ creciente,
   para $x \geq 0$ decreciente.

Representemos en un mismo sistema de coordenadas estas tres funciones y la función $y = x^2$ como se ilustra en la figura 5.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
x^2	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$2x^2$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8
$\frac{1}{2}x^2$	2	1.125	0.5	0.125	0	0.125	0.5	1.125	2
$-x^2$	-4	-2.25	-1	-0.25	0	-0.25	-1	-2.25	-4

a)



b)

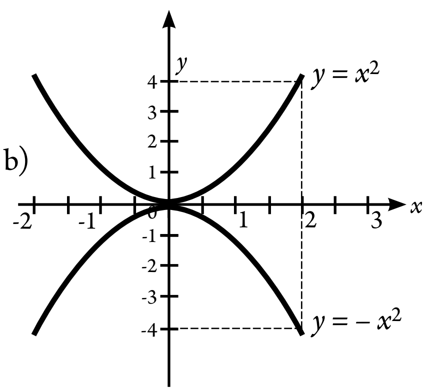


Figura 5

Si analizas las representaciones gráficas de la figura 5, puedes observar que para un mismo valor de x se cumple que el valor de la imagen correspondiente y en:

a) $y = 2x^2$ es mayor respecto a $y = x^2$; y se dice entonces que la gráfica de $y = 2x^2$ se obtiene por una **dilatación** de la gráfica de $y = x^2$ respecto al eje de las x;

b) $y = \frac{1}{2}x^2$ es menor respecto a $y = x^2$, y se dice entonces que la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$se 2 obtiene por una **contracción** de la gráfica de $y = x^2$ respecto al eje x;

c) $y = -x^2$ es el opuesto respecto a y = x^2; y se dice entonces que la gráfica de $y = -x^2$ se obtiene por una **reflexión** de la gráfica de $y = x^2$ considerando como eje de reflexión el eje x.

En general, el gráfico de $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ se puede obtener del gráfico de $y = x^2$ por una dilatación si $a > 1$; por una contracción si $0 < a < 1$ y por una reflexión si $a = -1$. Para los restantes valores de a $(a \neq 0)$ el gráfico se puede obtener por una composición de las transformaciones anteriores.

Resumen de las propiedades de las funciones: $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Propiedades	$a > 0$	$a<0$
Dominio	$x \in \Re$	$x \in \Re$
Imagen	$y \in \Re\,; y \geq 0$	$y \in \Re\,; y \leq 0$
Ceros	$x_1 = 0$	$x_1 = 0$
Vértice	$V(0,0)$	$V(0,0)$
Monotonía	$x \geq 0$ monótona creciente $x \leq 0$ monótona decreciente	$x \geq 0$ monótona decreciente $x \leq 0$ monótona creciente
Mínimo o máximo	$y = 0$ mínimo	$y = 0$ máximo
Gráfico	Parábola que abre hacia arriba	Parábola que abre hacia abajo
Simetría	Respecto al eje y	Respecto al eje y

Ejemplo | Determina la ecuación de una función cuadrática de la forma $y = ax^2$, si su gráfica pasa por el punto $A\ (1,3)$.

Resolución: Como $A(1,3)$ pertenece al gráfico de $y = ax^2$, se cumple que $3 = a\ (1)^2$, de donde, $a = 3$, luego la ecuación es $y = 3x^2$.

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Representa gráficamente las funciones siguientes:

a) $y = 3x^2$ b) $y = \frac{1}{3}x^2$ c) $y = -2x^2$ d) $y = \frac{1}{2}x^2$

e) $y = 1.2x^2$ f) $y = 0.4x^2$ g) $y = -0.3x^2$ h) $y = -1.5x^2$

A2) Determina la ecuación de una función de la forma $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ cuyo gráfico pasa por el punto:

a) $A\ (1,2)$ b) $B\ (-3,-3)$ c) $C\ (\sqrt{5},4)$ d) $D\ (2,-3)$

A3) Sea la función $y = -\frac{1}{4}x^2$

a) Represéntala gráficamente para $-4 \leq x \leq 4$.

b) Determina el conjunto imagen.

c) Analiza la monotonía para $-4 \leq x \leq 1$

d) ¿Es simétrica respecto al eje y la parábola representada? Fundamenta.

A4) Determina la ecuación de cada una de las funciones de la forma $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ representadas en la figura 6.

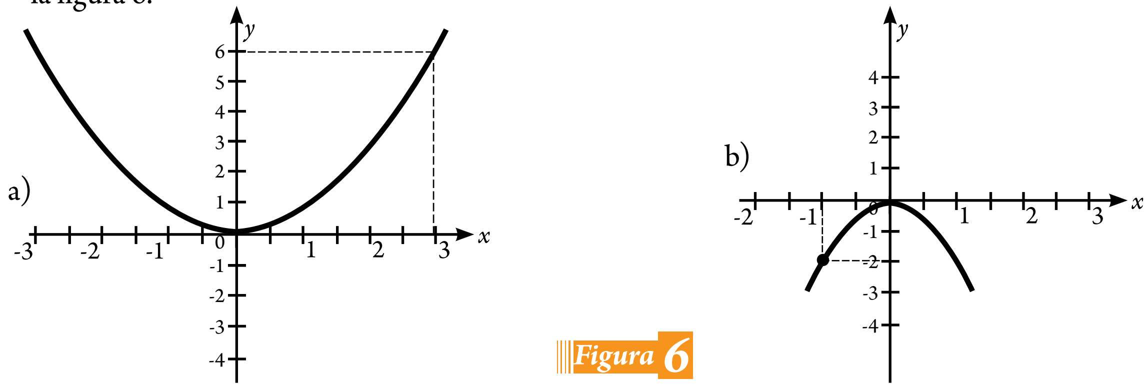


Figura 6

A5) Analiza gráficamente si las rectas cuyas ecuaciones se dan a continuación cortan el gráfico de la función $y = x^2$. Especifica en cuántos puntos en caso que la corte.

a) $y = x$ b) $y - 1 = 2x$ c) $y = -x$

d) $y = x - 4$ e) $y = 2x - 1$ f) $y = -2$

A6) Determina analíticamente las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola $y = 2x^2$ con las rectas:

a) $y = x$ y b) $5x - y + 3 = 0$

A7) Expresa el área de un círculo en función de la longitud (L) de su circunferencia. Traza el gráfico de la función obtenida para 0 cm ≤ L ≤ 10 cm.

A8) Para un cuerpo que inicia su movimiento rectilíneo uniformemente acelerado del reposo, la relación entre la distancia recorrida y el tiempo empleado para recorrerla se expresa por

$$s = \frac{1}{2}at^2 \ (t \geq 0s).$$

Traza el gráfico de esta función para una aceleración de $a = 9.8$ m/seg.^{2} en el intervalo de tiempo 0 seg. $\leq t \leq 5$ seg. Y determina, utilizando el gráfico, qué distancia ha recorrido el cuerpo al cabo de 2, 4 y 5.5 segundos.

Graficación de la función cuadrática general

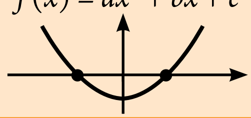
Aquí estudiarás un procedimiento que te permitirá representar gráficamente las funciones cuadráticas, a partir de la determinación de algunos elementos de la misma, tales como: sus ceros, el vértice, su eje y algunos otros puntos de su gráfica.

Para graficar cualquier función resulta conveniente conocer si esta función interseca o toca al eje de las x, o sea, si posee ceros.

Los elementos del dominio de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ cuyas imágenes toman valor cero, $y = f(x) = 0$, se denominan **ceros** de esta función.

Ceros de la función

$f(x) = ax^2 + bx + c$



Observa que si en la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ se sustituye la variable y por cero, obtenemos la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ y la misma puede tener una solución, dos soluciones o no tener soluciones reales, de ahí que la función cuadrática puede tener dos ceros, un cero o no tener ceros.

Así pues, para determinar el cero de una función cuadrática, se sustituye la y por cero y se despeja la x en la ecuación que resulta. La existencia de los ceros de una función cuadrática, al igual que las raíces de la ecuación cuadrática correspondiente, dependen del valor del discriminante $D = b^2 - 4ac$ de la ecuación de segundo grado que la define.

➡ De donde, si $D = b^2 - 4ac > 0$, existen dos soluciones reales que son:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad ; \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

Y la función cuadrática correspondiente posee dos ceros: $y_1 = f(x_1) = 0$ y $y_2 = f(x_2) = 0$. O sea, la parábola interseca al eje x en dos puntos (ver figura 7).

➡ Si $D = b^2 - 4ac = 0$, existe una solución real que es $x_1 = -b/2a$, y por tanto la función cuadrática correspondiente posee un solo cero: $y_1 = f(x_1) = 0$. La parábola interseca al eje x en un solo punto que coincide con el vértice de la parábola (ver figura 7).

➡ Si $D = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales y por tanto la función cuadrática correspondiente no tiene ceros. La parábola no interseca al eje x (ver figura 7).

Otro elemento o punto importante de la parábola es el **vértice** (***V***), pues su ordenada representa el **valor máximo** o el **valor mínimo** de la función cuadrática, por lo que para trazar la parábola correspondiente, y sobre todo para las aplicaciones, es necesario conocer las coordenadas del vértice.

Si observas la figura 7 de abajo notarás que las parábolas representadas tienen en común la abscisa del vértice (que es igual al cero de $y = ax^2$), es decir, $x_V = \frac{-b}{2a}$.

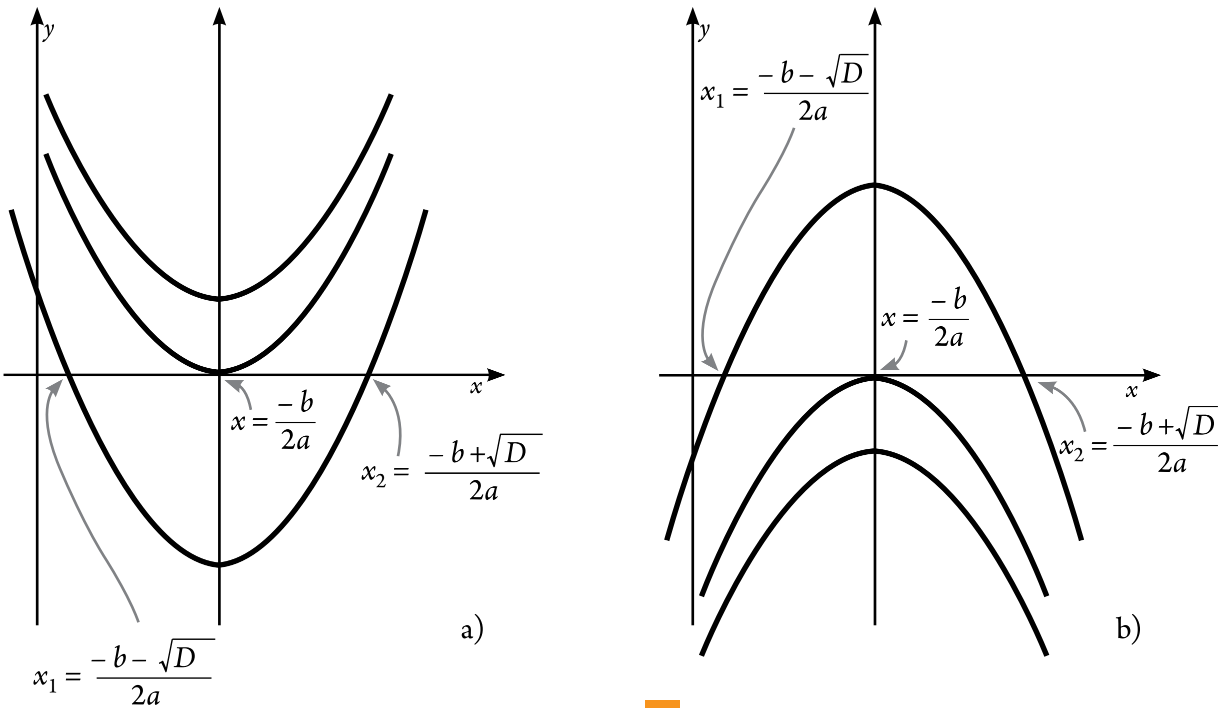


Figura 7

De hecho esta propiedad (que de momento no vamos a demostrar) se cumple para el vértice de cualquier parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$. Y la ordenada del vértice puede determinarse sustituyendo el valor de x_V en la ecuación que define la función tal como se muestra a continuación:

$$y_V = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-D}{4a}$$

En resumen, las coordenadas del vértice (V) de una función cuadrática cualquiera están determinadas por las expresiones:

$$x_V = \left(\frac{-b}{2a}\right) \quad \text{y} \quad y_V = \frac{-D}{4a}$$

Procedimiento para representar gráficamente una función cuadrática:

1) Calcular los ceros si los posee.
2) Calcular las coordenadas del vértice $x_V = \dfrac{-b}{2a}$; $y_V = f(x_V)$
3) Calcular las coordenadas de algunos puntos y sus simétricos respecto al eje de la parábola.
4) Representar los puntos determinados, en un sistema de coordenadas rectangulares.
5) Unir los puntos representados mediante una parábola.

Ejemplo | Haz el esbozo gráfico y analiza las principales propiedades de las funciones cuadráticas siguientes: a) $y = x^2 - 4$ y b) $y = x^2 - 4x + 3$

Resolución de: *a*) $y = x^2 - 4$

➡ Primeramente determinemos los ceros de: $x^2 - 4 = 0$

$$(x+2)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \quad \text{o} \quad x = 2$$

Por tanto, la parábola interseca al eje x en los puntos $P_1\,(-2, 0)$ y $P_2\,(2, 0)$

➡ Enseguida determinemos las coordenadas del vértice:

$$x_V = \frac{-b}{4a} = \frac{-0}{2(1)} = 0 \quad \text{y} \quad y_V = (0)^2 - 4 = -4, \quad \text{luego } V(0, -4)$$

Otro elemento importante en la graficación es la determinación del Eje de la parábola (o de la recta respecto a la cual la gráfica es simétrica). Para este caso el eje viene dado por la ecuación de la recta: $x = 0$ (que corresponde al eje de las y).

➡ Después calculemos las coordenadas de otros puntos del gráfico (figura 8):

$$y = (0.5)^2 - 4 = 0.25 - 4 = -3.75$$

$$y = (1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3 \qquad y = (1.5)^2 - 4 = 2.25 - 4 = -1.75$$

x	–1.5	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5
y	–1.75	–3	–3.75	–4	–3.75	–3	–1.75

➡ Por último, con el conocimiento y localización de todos estos elementos en el sistema coordenado rectangular trazamos la gráfica (ver figura 8).

➡ De donde determinamos sus **propiedades:**

Dominio: $\Re$
Imagen: $y \in \Re: y \geq -4$
Monotonía: monótona creciente para $x \geq 0$
monótona decreciente para $x \leq 0$.
Valor mínimo: $y = -4$
Es simétrica respecto al eje y.

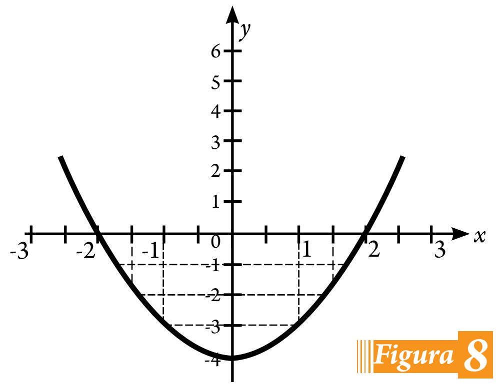


Figura 8

Resolución de b: $y = x^2 - 4x + 3$

➡ Primero calculamos los ceros:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-3)(x-1) = 0$$
$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0$$
$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 1$$

Por tanto, la parábola interseca al eje x en los puntos $P_1\,(3, 0)$ y $P_2\,(1, 0)$.

➡ Ahora determinemos las coordenadas del vértice:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2 \quad , \qquad y_V = (2)^2 - 4(2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Recuerda que también se puede calcular la ordenada del vértice con la expresión

$$y_V = \frac{-D}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(-4)^2 + 4(1)(3)}{4(1)} = \frac{-16 + 12}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \quad ; \quad \text{luego } V\,(2, -1).$$

➡ Al confeccionar la tabla de valores donde se determinan otros puntos del gráfico, para mayor comodidad colocamos las coordenadas del vértice en el centro de ésta, pues la parábola es simétrica respecto a la recta vertical $x = 2$ (eje de la parábola). Observa que respecto a 2 son simétricos 1.5 y 2.5; 0 y 4; etcétera (figura 9).

x	0	1.5	2	2.5	4
y	3	−0.75	−1	−0.75	3

➡ De la representación gráfica se obtienen las propiedades siguientes:

Dominio: el conjunto de los números reales.

Imagen: el conjunto formado por todos los números reales y tales que $y \geq -1$.

Monotonía: la función es monótona creciente para todo número real $x \geq 2$ y monótona decreciente para todo número real $x \leq 2$.

Tiene un valor mínimo $y = -1$, lo alcanza en $x = 2$.

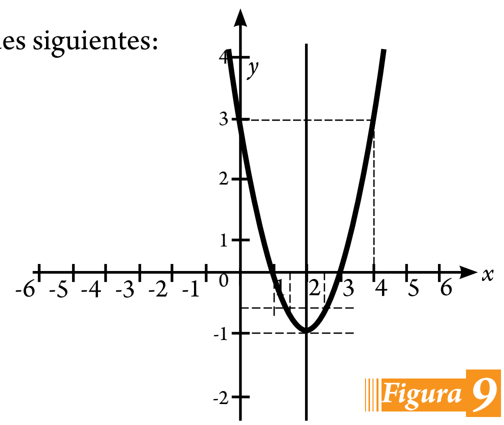


Figura 9

A continuación (en la figura 10) están graficadas las parábolas

$$y = x^2,\ \ y = x^2 + 1,\ \ y = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 \quad \text{y} \quad y = (x-3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10\,.$$

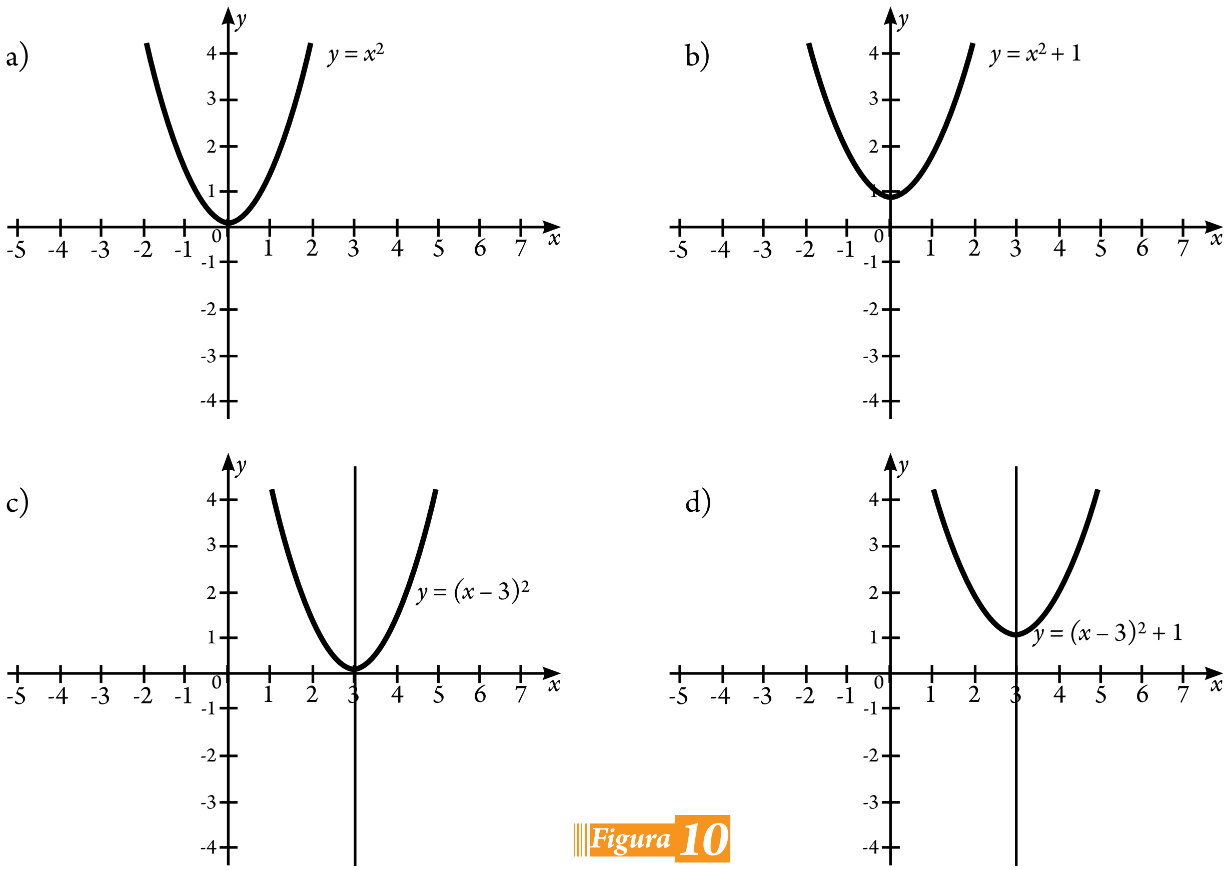


Figura 10

Observa como todas las gráficas de la figura 10 se pueden obtener mediante movimientos de traslación horizontal o vertical de la parábola $y = x^2$. Las observaciones anteriores pueden ser generalizadas como:

1. Los gráficos de las funciones de la forma $y = x^2 + k$ se obtienen por una traslación del gráfico de $y = x^2$ en la dirección del eje de las y. Si $k > 0$ hacia arriba y si $k < 0$ hacia abajo.

2. Los gráficos de las funciones de la forma $y = (x - h)^2$ se obtienen por una traslación del gráfico de $y = x^2$ en la dirección del eje de las x. Si $h > 0$ hacia la derecha, si $h < 0$ hacia la izquierda.

3. Los gráficos de las funciones de la forma $y = (x - h)^2 + k$ se obtienen aplicándole a la parábola $y = x^2$ una composición de dos traslaciones en la dirección de los ejes coordenados, teniendo en cuenta los casos anteriores.

En general, la gráfica de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ es una parábola cuyo eje de simetría es la recta perpendicular al eje x que contiene al vértice $V\,(x_V, y_V)$, que es el punto del gráfico que tiene el menor (o mayor) valor de las imágenes, y esta abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$, tal como se muestra en los siguientes ejemplos gráficos:

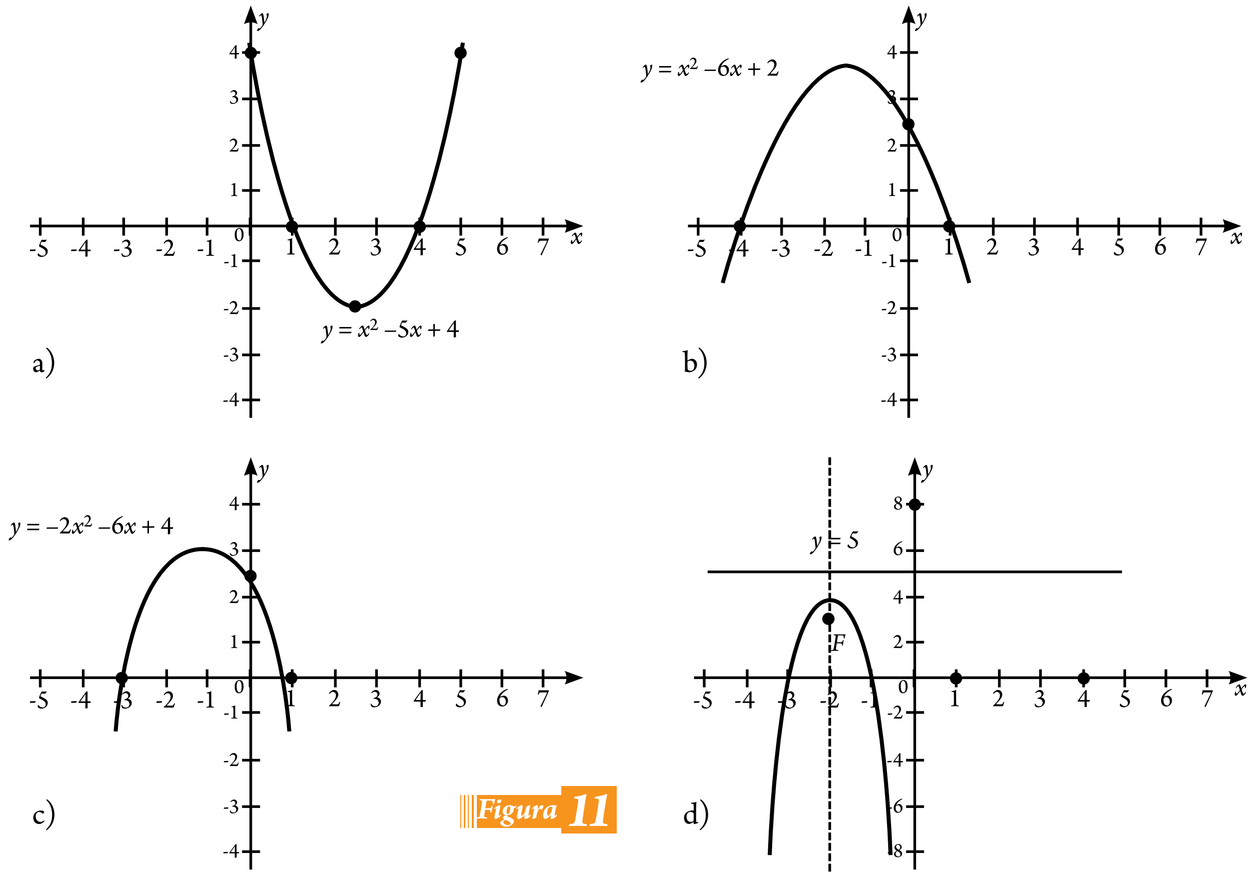


Figura 11

En la figura 11 se muestra la gráfica de la función: $y = -4x^2 - 16x - 12$, cuyo vértice es $V(-2,4)$. Y la cual es equivalente a esta otra función $y = -4\,(x - (-2))^2 + 4$, donde se observan directamente las coordenadas del vértice y cuya forma general es $y = a(x - h)^2 + k$.

Estas observaciones nos sugieren que si una función cuadrática cualquiera que está escrita en su forma general $y = ax^2 + bx + c$, la transformamos (por el ***Método de Completar un Trinomio Cuadrado Perfecto***) a la forma equivalente $y = a(x - h)^2 + k$, entonces de esta última podemos obtener directamente las coordenadas del vértice de la parábola.

Esto se puede demostrar analíticamente de la siguiente manera:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left[\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left[\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left[c - \frac{b^2}{4a}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-D}{4a}\right) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-D}{4a}\right)$$

haciendo los cambios de variable: $\left(\frac{-b}{2a}\right) = h$ y $\frac{-D}{4a} = k$, obtenemos finalmente que:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad y = a\,(x - h)^2 + k}$$

Ya para cerrar esta unidad de estudio, y para no olvidar la gran importancia práctica que tiene el disponer de fórmulas para determinar los valores máximos y mínimos de una función cualquiera y de una cuadrática en particular, resolvamos el siguiente par de problemas los cuales ya fueron planteados con anterioridad:

El problema del chisme: Si un chisme se propaga en una población de 100 personas a una velocidad (y) que es directamente proporcional al producto del número de los ya enterados (x) con el número de los que no lo están. ¿En qué momento el chisme se propaga más rápido?

Resolución: Recuerda que la función cuadrática (o el modelo cuadrático) correspondiente para esta problemática es

$$y = kx(100 - x) = -kx^2 + 100kx,\ donde\ k > 0$$

Y que la posible solución se encontró evaluando la función (método por tanteos), pues ahora ya estamos en posibilidades de encontrar la respuesta exacta, ya que la solución buscada es precisamente la ordenada del vértice de su gráfica (parábola) correspondiente

$$V\left(x_V = \frac{-b}{4a} \quad , \quad y_V = \frac{-D}{4a}\right) = V\left(x_V = \frac{-100k}{2(-k)} \quad , \quad y_V = \frac{-[(100k)^2 - 4(-k)(0)]}{4(-k)}\right)$$

$$= V\,(x_V = 50 \quad , \quad y_V = 2500k)$$

De donde se observa, ahora sí con certeza, que para $x = 50$ el chisme se propaga con la mayor velocidad que es $y = f(50) = 2500\,k$.

El problema de la dieta: Se estudiaron los efectos nutricionales sobre ratas que fueron alimentadas con una dieta que contenía un 10% de proteína. La proteína consistía en levadura y harina de maíz. Variando el porcentaje p de levadura en la mezcla de proteína, se estimó que el peso promedio ganado (en gramos) de una rata en un período fue de $\bar{P}$, donde: $\bar{P} = -\frac{1}{50}p^2 + 2p + 20;\ 0 \le p \le 100$. Encuentre el máximo peso ganado variando el porcentaje p de levadura.

Resolución:

Como $a < 0$ entonces la gráfica tiene un valor máximo en su vértice, de donde este problema también se reduce a determinar las coordenadas del vértice de la gráfica (parábola) correspondiente,

$$V\left(P_V = \frac{-b}{2a} \quad , \quad \bar{P}_V = \frac{-D}{4a}\right) = V\left(P_V = \frac{-2}{2 - \left(\frac{1}{50}\right)} \quad , \quad \bar{P}_V = \frac{-\left[(2)^2 - 4\left(\frac{-1}{50}\right)(20)\right]}{4\left(\frac{-1}{50}\right)}\right)$$

$$= V\,(p_V = 50 \quad , \quad \bar{P}_V = 70$$

Por tanto, el máximo peso ganado fue de 70 gramos con una mezcla que contiene 50% de levadura.

Actividades de aprendizaje para resolver en equipo

A1) Representa gráficamente las funciones siguientes y determina: dominio, imagen, intervalos de monotonía y valor máximo o valor mínimo.

a) $y = x^2 - 2x + 1$ b) $y = x^2 + 3x$ c) $y = x^2 - 4x + 6$

d) $y = -x^2 + 4$ e) $y = 2x^2 + 4x$ f) $y = -x^2 - 4x + 5$

g) $f(x) = 2x^2 - 3$ h) $g(x) = 0.5x^2 - 8x + 21$ i) $y = -4x^2 + 6x - 12$

A2) Haz un esbozo del gráfico de las funciones dadas en cada inciso de los cuales se dan las coordenadas del vértice.

a) $y = -x^2 + 2$; V $(0, 2)$ b) $y = x^2 - 6x + 9$; V $(3, 0)$ c) $y = -x^2 + 6x - 9$; V$(3, 0)$

A3) Escribe las ecuaciones del tipo $y = x^2 + bx + c$ que definen a las funciones representadas en la figura 12.

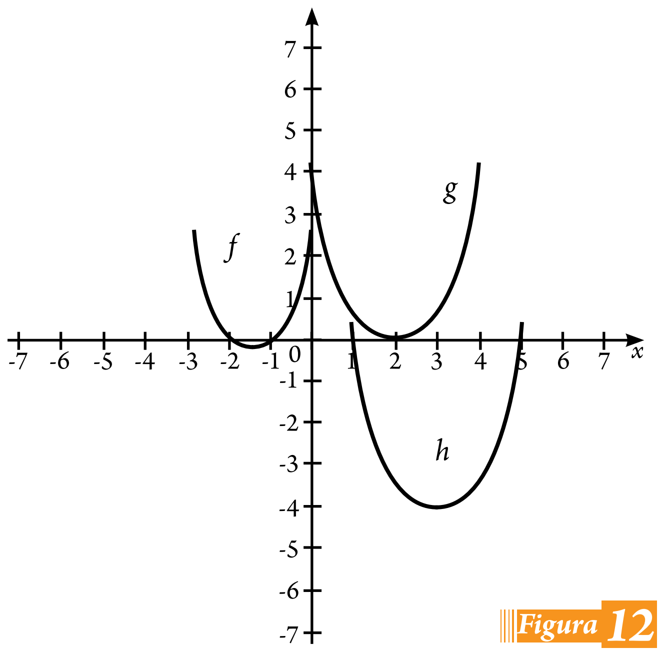


Figura 12

A4) ¿Cuáles de las funciones siguientes tienen valor máximo o mínimo? Indica en cada caso cuál es el valor máximo o el mínimo.

a) $y = \frac{1}{5}x^2 + 1$ b) $f(x) = 4x^2 - 2x + 3$

c) $g(x) = -x^2 + 2x + 3$ d) $y = -x^2 - 4x - 4$

A5) Determina el vértice y la forma general de las siguientes funciones cuadráticas:

a) $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 1$ b) $y = (x+4)^2 - 5$ c) $y = -2(x-6)^2$

A6) Mediante el método de completar un trinomio cuadrado perfecto, determina los vértices correspondientes de las funciones siguientes transformándolas a la forma $y = a(x-h)^2 + k$.

a) $f(x) = 2x^2 - 3$ b) $g(x) = x^2 - 8x + 21$ c) $y = -x^2 + 6x - 12$

A7) El perímetro de un rectángulo es de 20 cm y su base mide x. Expresa los valores de su área (A) en función de la longitud de la base y representa gráficamente esta dependencia para $0 \leq x \leq 10$.

A8) Calcula los ceros de las funciones siguientes, en caso de que existan:

a) $y = x^2 + \frac{1}{2}x + 2$ b) $f(x) = -x^2 + 3$ c) $y = 3x^2 + 3x + 1$

d) $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$ e) $g(x) = -x^2 + 7x - 10$ f) $y = 3x^2 + 3$

A9) Escribe la ecuación de una función de la forma $y = x^2 + bx + c$, si conoces los elementos siguientes:

a) El vértice es V $(0, 5)$.

b) El vértice es V $(3, -10)$ y $c = -1$.

c) Los ceros son $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$.

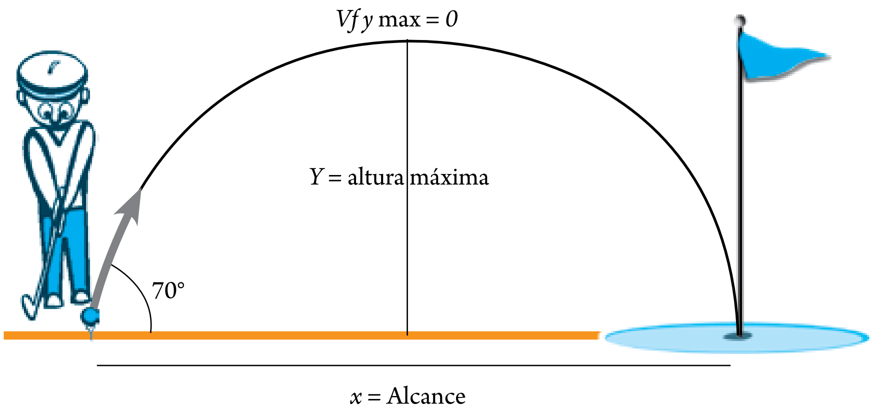
d) Su gráfico pasa por los puntos $A\ (1, 1)$ y $B\ (-2, 3)$.

e) Para $x \leq 3$ es monótona creciente y para $x \geq 3$ es monótona decreciente.

A10) Escribe la ecuación de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, si su gráfico pasa por los tres puntos siguientes:

a) $A\ (1, 0)$, $B\ (2, 5)$ y $C\ (-3, -4)$ b) $M\ (1, 6)$, $H\ (-2, -5)$ y $P\ (4, -8)$

A11) Suponga que la altura y de una pelota lanzada verticalmente hacia arriba está dada por $y = -4.9t^2 + 70t + 10$, donde y está en metros y t es el tiempo transcurrido en segundos. ¿Después de cuántos segundos la pelota alcanza su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima? ¿Cuántos segundos tarda la pelota en regresar al piso? ¿Desde qué altura se lanzó la pelota?



A12) El desplazamiento s de un objeto desde un punto de referencia en el tiempo t, está dado por $s(t) = 6.5t^2 - 12t + 7.4$, donde s está en metros y t en segundos. ¿Para qué valor de t ocurre el desplazamiento mínimo? ¿Cuál es el desplazamiento mínimo del objeto?

A13) En cada inciso de la figura 13 se representan funciones cuadráticas. Determina para cada una, a partir de la gráfica, el vértice, los ceros y para cuáles valores de x las imágenes son positivas y para cuáles las imágenes son negativas.

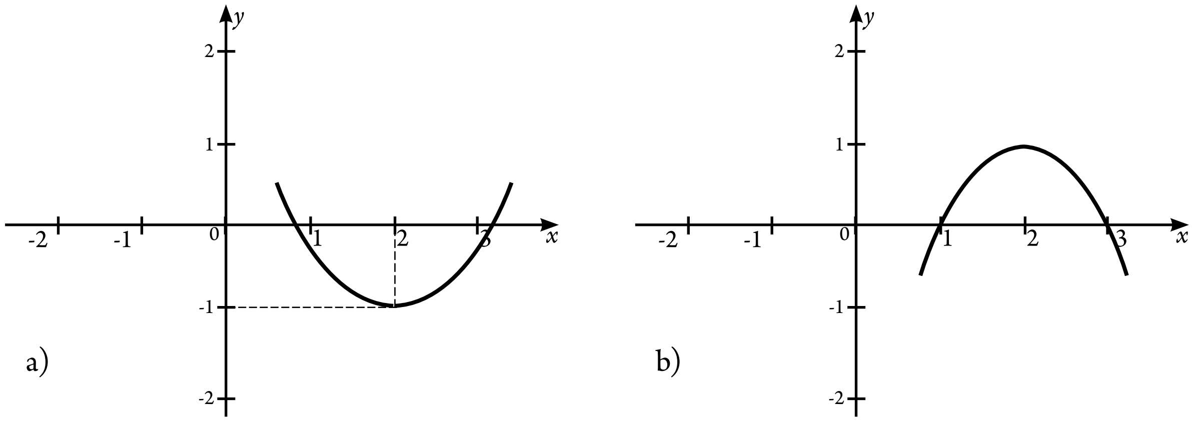


Figura 13

A14) Escribe la ecuación de la función cuadrática, y de la recta que corresponde al eje, de las parábolas que aparecen representadas en la figura 14.

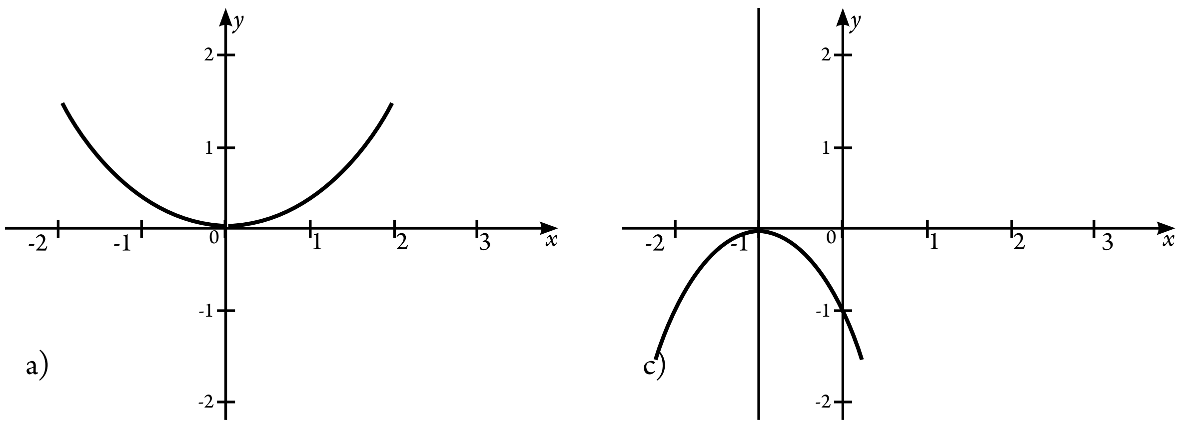


Figura 14

A15) Durante una colisión, la fuerza F (en newtons) que actúa sobre un objeto varía con el tiempo t de acuerdo con la ecuación $F(t) = 38t - 35t^2$, donde t está en segundos. ¿Cuál fue el valor máximo de la fuerza? ¿Para qué valor de t fue máxima la fuerza?

A16) Un constructor de edificios quiere cercar un terreno rectangular adyacente a un río recto utilizando la orilla del río para un lado del área encerrada. Si el contratista tiene 600 m de cerca, encuentra las dimensiones del área máxima que se puede encerrar.

A17) ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor área cuyo perímetro es igual a 38 metros?

A18) En una reacción química la velocidad de formación R de una nueva sustancia, originada por 250 unidades de una sustancia dada como reactivo, es igual a $R(x) = 10x\,(250 - x)$ donde x es la cantidad de nueva sustancia. ¿Para qué valor de x es mínima la velocidad de la reacción?

A219) El dueño de un hotel que cuenta con 60 habitaciones ha encontrado que puede rentarlas todas a un precio de $200.00 diarios. Sin embargo, por cada aumento de $5.00 en la renta perderá un cliente. ¿Cuál debe ser el aumento en la renta para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?

4.3 Inecuaciones cuadráticas: conceptos y aplicaciones

Las inecuaciones cuadráticas, al igual que las inecuaciones lineales, también tienen muchas aplicaciones en el campo de las ciencias, la ingeniería y en muchas situaciones prácticas. Esto es, la modelación matemática para la resolución de determinados tipos de problemas se realiza con la utilización de inecuaciones cuadráticas tal como se muestra a continuación.

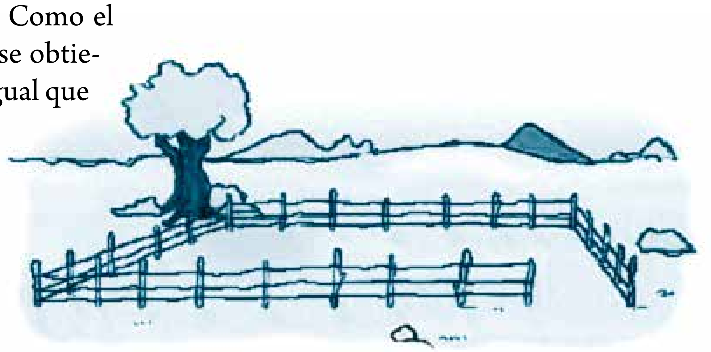
Problema. Un campo rectangular de juegos, con un perímetro de 100 metros, debe tener un área de por lo menos 500 metros cuadrados. ¿Dentro de qué limites deben estar las longitudes de los lados del rectángulo?

Proceso de modelación: Sea la variable "x" un lado del rectángulo y la variable "y" el otro lado. Como el perímetro del rectángulo es: $2x + 2y = 100$, se obtiene: $y = 50 - x$. Y como el área A es mayor o igual que 500 metros cuadrados ($A \geq 500$ m^2), de la fórmula del área del rectángulo, obtenemos la siguiente inecuación cuadrática:

$x\,(50 - x) \geq 500$

$\Rightarrow\ -x^2 + 50x - 500 \geq 0$

$\Rightarrow\ x^2 - 50x + 500 \leq 0$



Cuya resolución requiere de métodos que serán estudiados a continuación.

Las inecuaciones cuadráticas que estudiaremos en este apartado son expresiones de la forma general:

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \quad : \quad ax^2 + bx + c \geq 0 \quad ; \quad ax^2 + bx + c < 0 \quad ; \quad ax^2 + bx + c > 0 \quad ; \quad a \neq 0$$

Para descubrir un método de resolución analizamos las gráficas de $y = x^2 - 4$ y de $y = x^2 - 16x - 12$ de las cuales se observa respectivamente que:

i) $y = x^2 - 4 = 0$, si: $x = 2$ y $x = -2$

ii) $y = x^2 - 4 < 0$, si: $-2 < x < 2$

iii) $y = x^2 - 4 > 0$, si: $x < -2$ y $x > 2$

i) $y = -4x^2 - 16x - 12 = 0$, si: $x = -3$ y $x = -1$

ii) $y = -4x^2 - 16x - 12 < 0$, si: $x < -3$ y $x > -1$

iii) $y = -4x^2 - 16x - 12 > 0$, si: $-3 < x < -1$

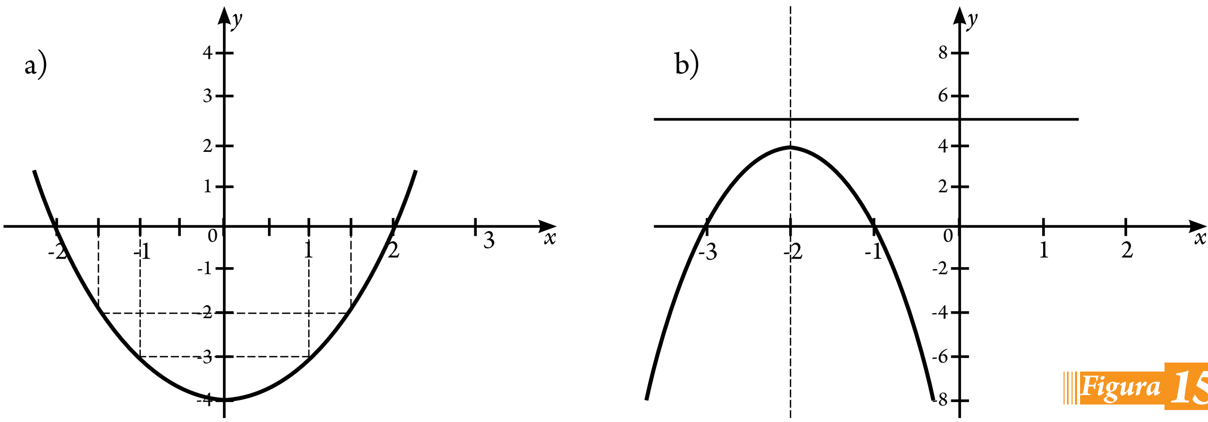
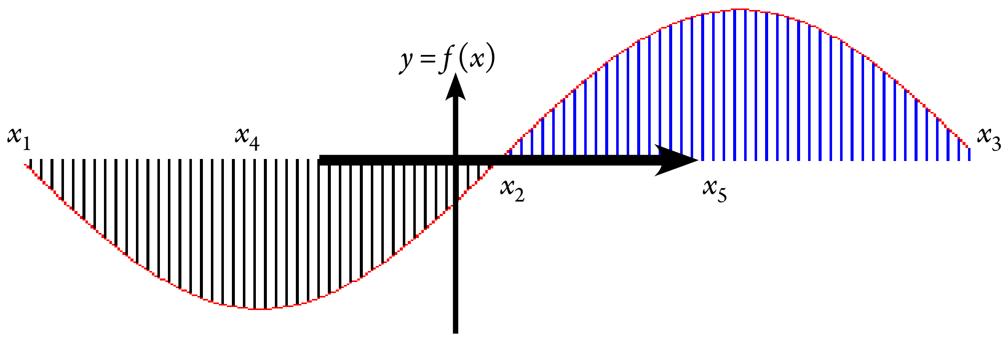


Figura 15

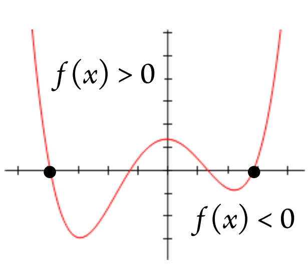
O sea, que para resolver una inecuación cuadrática podemos aplicar el hecho general de que un polinomio $y = f(x)$, o una función cuadrática, puede cambiar signos sólo en sus ceros (los valores de x que hacen 0 al polinomio: $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$).

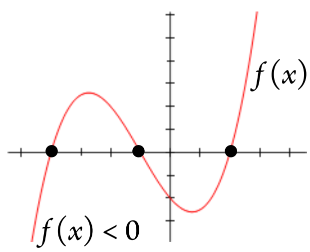
Así, entre dos ceros consecutivos un polinomio debe ser solamente positivo $(f(x_5) > 0)$ o solamente negativo $(f(x_4) < 0)$ tal como se observa en la gráfica de abajo:



Gráfica del polinomio: $y = f(x)$; donde: x_1, x_2 y x_3 son raíces de $f(x) = 0$.

Esto significa que cuando los ceros reales de un polinomio se ponen en orden, dividen la recta real en intervalos en los que el polinomio no tiene cambios de signo. Estos ceros son los **números críticos** de la desigualdad, y los intervalos resultantes son los **intervalos de prueba** para la desigualdad.





Para determinar los intervalos en los que los valores de un polinomio son solamente negativos, o solamente positivos, procedamos como sigue:

1. Hallamos los ceros reales del polinomio y los arreglamos en orden creciente (de menor a mayor), son sus **números críticos**.
2. A partir de los números críticos determinamos sus **intervalos de prueba**.
3. Escogemos un valor x representativo en cada intervalo de prueba y evaluamos el polinomio en ese valor. Si el valor del polinomio es positivo (negativo) entonces el polinomio tendrá valores positivos (negativos) para toda x en el intervalo.

Ejemplo | Resolver la inecuación cuadrática: $x^2 - 2x - 3 < 0$

Resolución: Primero se determinan los ceros del polinomio $x^2 - 2x - 3$, por lo cual se factoriza $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$, de donde, tiene dos ceros: $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$.

Luego estos ceros dividen la recta real en tres intervalos de prueba:

$$\begin{array}{cccccccccc} -\infty & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & + & \infty \\ \longleftarrow & & & & & & & & & \longrightarrow \\ (& x_1 &)(& x_2 & & &)(& & x_3 &) \end{array}$$

Por esto, para resolver la desigualdad $f(x) = x^2 - 2x - 3 < 0$, sólo necesitamos probar un valor de cada uno de estos intervalos de prueba. Sean por ejemplo:

$x_1 = -2 \in (-\infty, -1)$ $\qquad f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5 > 0$

$x_2 = 0 \in (-1, 3)$ $\qquad f(0) = (0) - 2(0) - 3 = -3 < 0$

$x_3 = 4 \in (3, \infty)$ $\qquad f(4) = (4)^2 - 2(4) - 3 = 16 - 8 - 3 = 5 > 0$

Por tanto, el intervalo abierto $(-1, 3)$ es el conjunto solución de la desigualdad, o sea, $-1 < x < 3$, como la desigualdad es estricta la solución no incluye los extremos del intervalo.

¿Cuál es el conjunto solución de la inecuación $x^2 - 2x - 3 > 0$? y ¿cuál es el conjunto solución de la inecuación $x^2 - 2x - 3 \geq 0$?

Ejemplo | Resolver la inecuación cuadrática: $x^2 - x - 6 > 0$

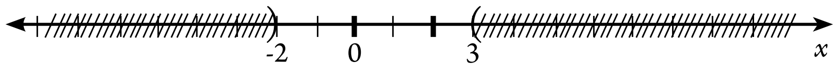
Resolución: Factorizando tenemos que $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$, de donde, los números críticos son $x_1 = -2$ y $x^2 = 3$; por lo tanto, los intervalos de prueba son:

$$(-\infty, -2) \qquad , \qquad (-2, 3) \qquad \text{y} \qquad (3, \infty)$$

Intervalo y valor de x de prueba	**Valor del polinomio**
$x = -3 \in (-\infty, -2)$	$f(-3) = (-3)2 - (-3) - 6 = 6 > 0$
$x = 0 \in (-2, 3)$	$f(0) = (0)^2 - (0) - 6 = -6 < 0$
$x = 4 \in (3, \infty)$	$f(4) = (4)^2 - (4) - 6 = 6 > 0$

Por tanto, el conjunto solución de la desigualdad es: $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$

Representación gráfica:



Ejemplo Resuelve la inecuación: $x^2 \leq -4x - 1$

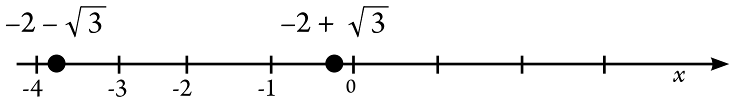
Resolución: para determinar los intervalos de prueba para una desigualdad con polinomios, ésta debe ser primeramente escrita en forma estándar (con el polinomio en el miembro izquierdo y 0 en el derecho). Por tanto, $x^2 \leq -4x - 1$ debe ser escrita como: $x^2 + 4x + 1 \leq 0$. Por la fórmula general, los ceros de $x^2 + 4x + 1$ son:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

Números críticos: $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ y $x_2 = -2 + \sqrt{3}$

Intervalos y valores de x de prueba:

$x = -4 \in (-\infty, -2 - \sqrt{3})$, $x = -1 \in (-2 - \sqrt{3}, \; -2 + \sqrt{3})$ y $x = 0 \in (-2 + \sqrt{3}, \; \infty)$



$f(-4) = (-4)^2 + 4(-4) + 1 = 1 > 0$ NO
$f(-1) = (-1)^1 + 4(-1) + 1 = -2 < 0$ SÍ
$f(0) = (0)^2 + 4(0) + 1 = 1 > 0$ NO

Por tanto, el conjunto solución de la desigualdad es el intervalo cerrado:
$[-2 - \sqrt{3}, \; -2 + \sqrt{3}]$ o sea, $-2 - \sqrt{3} \leq x \leq -2 + \sqrt{3}$

Otro método algebraico para resolver las inecuaciones cuadráticas es el que se ilustra con el siguiente ejemplo

Ejemplo Resolver la desigualdad cuadrática: $x^2 - 2x - 3 < 0$

Resolución:

$x^2 - 2x - 3 < 0$ (*Se factoriza el trinomio*)

$(x - 3)(x + 1) < 0$ (*... entonces los factores son de signo contrario...*)

Opción 1: $x - 3 > 0$ y $x + 1 < 0 \Rightarrow x > 3$ y $x < -1 \Rightarrow$ *No puede ser ...*

Opción 2: $x - 3 < 0$ y $x + 1 > 0 \Rightarrow x < 3$ y $x > -1 \Rightarrow -1 < x < 3$ *es la solución*

Aplicaciones de las inecuaciones cuadráticas

Ejemplo | Determinar el dominio de las expresiones siguientes, teniendo en cuenta que estas expresiones toman valores reales:

a) $\sqrt{x+5}$ b) $\sqrt{7-2x}$ c) $\sqrt{64-4x^2}$

Resolución:

a) La expresión $\sqrt{x+5}$ está definida en $\Re$ para las x tales que $x+5 \geq 0$, o sea, $x \geq -5$, luego el dominio de la expresión es $[-5, \infty)$.

b) La expresión $\sqrt{7-2x}$ está definida en $\Re$ para las x tales que $7-2x \geq 0$, o sea, $-2x \geq -7$, $2x \leq 7$, $x \leq 7/2 = 3.5$, luego el dominio de la expresión es $(-\infty, 3.5]$

c) La expresión $\sqrt{64-4x^2}$ está definida en $\Re$ para las x tales que:

$64-4x^2 \geq 0$ (Dividiendo ambos miembros entre 4)

$16-x^2 \geq 0$ (Factorizando el binomio)

$(4-x)(4+x) \geq 0$

Números críticos: $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$

Intervalos de prueba: $(-\infty,-4)$, $(-4, 4)$ y $(4, \infty)$

Una prueba demuestra que $64-4x^2 \geq 0$ para $-4 \leq x \leq 4$. Por lo tanto, el dominio de la expresión $64-4x^2$ es el intervalo $[-4, 4]$.

Ejemplo | Un campo rectangular de juegos, con un perímetro de 100 metros, debe tener un área de por lo menos 500 metros cuadrados. ¿Dentro de qué limites deben estar las longitudes de los lados del rectángulo?

Resolución: anteriormente ya encontramos que el modelo correspondiente para este problema es la inecuación cuadrática: $x^2-50x+500 \leq 0$, la cual ahora ya podemos resolver. Por la fórmula general los ceros del trinomio son:

$$x = \frac{50 \pm \sqrt{2500-2000}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{500}}{2} = \frac{50 \pm 10\sqrt{5}}{2} = 25 \pm 5\sqrt{5}$$

De donde los números críticos son: $x_1 \approx 36.2$ y $x_2 \approx 13.8$

Intervalos y valores de x de prueba:

$x = 0 \in (-\infty, 13.8)$	$\Rightarrow f(0) = (0)^2 - 50(0) + 500 = 500 > 0$	NO
$x = 20 \in (13.8, 36.2)$	$\Rightarrow f(20) = (20)^2 - 50(20) + 500 = -100 < 0$	SÍ
$x = 40 \in (36.2, \infty)$	$\Rightarrow f(40) = (40)^2 - 50(40) + 500 = 100 > 0$	NO

Por tanto el conjunto solución es: $13.8 \le x \le 36.2$

Cuando $x = 13.8$ entonces $y = 50 - 13.8 = 36.2$ (mayor valor)

Cuando $x = 36.2$ entonces $y = 50 - 36.2 = 13.8$ (menor valor)

También se cumple que: $13.8 \le y \le 36.2$

Comprobación: $(36.2)(13.8) = (13.8)(36.2) \approx 500$ ¡SÍ!

$x = 13$, $y = 37$; $(13)(37) = 481 < 500$ ¡No cumple!

$x = 20$, $y = 30$; $(20)(30) = 600 \ge 500$ ¡SÍ!

$x = 25$, $y = 25$; $(25)(25) = 625 \ge 500$ ¡Máxima área!

Respuesta: Las longitudes de los lados del rectángulo toman valores entre 13.8 metros y 36.2 metros.

Ejemplo

El porcentaje de ciudadanos de un país graduados de universidad, entre 1940 y 1987, se puede calcular mediante el modelo: $Pg = 5.163 + 0.0069\,t^2$. En donde el tiempo t representa el año calendario, con $t = 0$ correspondiente a 1940. Según este modelo, ¿cuándo rebasarán los egresados el 25% de la población?

Resolución: Planteamiento de la desigualdad

$$5.163 + 0.0069t^2 \ge 25$$
$$0.0069t^2 \ge 25 - 5.163$$
$$0.0069t^2 \ge 19.864$$
$$t^2 \ge \frac{19.864}{0.0069} \approx 2878.84$$
$$t \ge \sqrt{2878.84} \approx 53.65$$

Como $t = 0$ corresponde a 1940, $t \approx 53.65 \approx 54$ corresponde a 1994. Por tanto (Respuesta), para 1994 los egresados universitarios deben rebasar el 25% de la población.

Actividades de aprendizaje de la unidad 4 para resolver en equipo

A1) Resolver por cualquier método las siguientes inecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 + 4x \le 0$
b) $x^2 - 7x + 6 < 0$
c) $x^2 - 10x + 21 > 0$
d) $x^2 - 3 \le 0$
e) $5x^2 - 20x - 25 > 0$
f) $3x^2 - 18x + 27 \le 0$
g) $x^2 + 10x + 16 \ge 0$
h) $x^2 - 25x + 150 > 0$
i) $x^2 + 5x < 24$
j) $x^2 \ge 2x + 15$
k) $x^2 + 4x \le 0$
l) $3x^2 - 18x + 27 \le 0$
m) $x^2 - 10x + 21 > 0$
n) $x^2 - 3 \le 0$
ñ) $5x^2 - 20x - 25 > 0$

A2) Resuelve y comprueba que el conjunto solución propuesto es el correcto:

a) El conjunto solución de la desigualdad cuadrática: $x^2 + 2x + 4 > 0$. Está formado por todo el conjunto de números reales, $(-\infty, \infty)$. En otras palabras, es positiva para todo valor real de x, no tiene (ceros) números críticos.

b) El conjunto solución de la desigualdad cuadrática: $x^2 + 2x + 1 \le 0$. Está formado por un solo número real $\{-1\}$

c) El conjunto solución de la inecuación cuadrática: $x^2 - 4x + 4 > 0$, está formado por todos los números reales excepto el 2. En notación de intervalo: $(-\infty , 2) \cup (2, \infty)$

A3) ¿Qué números satisfacen la condición: "7 menos la quinta parte de un número es mayor o igual que dicho número"?

A4) Si la temperatura en el ártico en un período de 24 horas varía entre – 49 °F y 14 °F. ¿Cuánto varía en grados Celsius si °F = 9/5 °C + 32 ?

A5) En un experimento de Química, la solución de ácido clorhídrico debe mantenerse de tal forma que su temperatura no sea menor que 28 °C ni mayor de 37 °C . ¿Cuál será la variación de la temperatura en grados Fahrenheit si °C = 5/9 (°F – 32)?

A6) De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza "*F*" (en libras) que se requiere para estirar un resorte "*x*" pulgadas más de su longitud natural está dada por $F = (4.5)x$. Si $8 \leq F \leq 16$, ¿cuál es la variación correspondiente de x?

A7) La ley de Boyle para cierto gas dice que $pV=200$, donde p denota la presión (libras/pulgadas^2) y V denota el volumen (pulgadas^3). Si $30 \leq V \leq 60$, ¿cuál es la variación correspondiente de p?

A9) Probar que de todos los rectángulos con perímetro constante el que alcanza mayor área es precisamente un cuadrado.

A10) Una persona sabe que su peso normal, de acuerdo con su estatura, debe estar entre 60 kg y 65 kg. Ella calcula que si pesara 45 kg menos que el doble de su peso actual estaría entre los límites normales. ¿Entre qué límites está su peso?

A11) Un equipo de baloncesto ganó 16 juegos más de los que perdió, no hubo empates. Si el equipo jugó más de 38 juegos y menos de 60 juegos. ¿Cuántos juegos pudo haber perdido?

Bibliografía

Bibliografía de consulta para el estudiante y el profesor.

1. Ylé Martínez, A, Juarez, Duarte, J.A, Flórez Arco, A. Matemáticas I. DGEP-UAS, México, 2016.

2. De Oteyza, Elena. Conocimientos fundamentales de matemáticas: ÁLGEBRA. UNAM, México, 2006.

3. Cuéllar, C. Juan Antonio. Matemáticas II para bachillerato. McGrawHill, México, 2016.

4. De la Peña, J.A. ÁLGEBRA EN TODAS PARTES. Colección la ciencia para todos, No. 166, México, 1999.

5. Bosch, Gascón y Chevallard. Estudiar matemáticas. SEP, México, 1998.

6. Mancera, M.E, Saber matemáticas es saber resolver problemas. Grupo Editorial Iberoamérica, México 2000.

7. Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas.* Editorial Trillas. México1981

8. Santos Trigo, L. M. *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos.* Editorial Trillas. México 2007.

MATEMÁTICAS II
Álgebra para Bachillerato
Arturo Ylé Martínez, José Alfredo Juárez Duarte, Armando Flórez Arco

Se terminó de imprimir en el mes de enero de 2017
en los talleres gráficos de *Servicios Editoriales Once Ríos, S.A. de C.V.,*
Río Usumacinta No. 821 Col. Industrial Bravo
Tel. 712-2950 Culiacán, Sin.

La edición consta de 22 000 ejemplare